Dissertação de Mestrado

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

# Sinalização FTN Tempo-Frequência para o GFDM: *Sphere Decoder* e Avaliação de Desempenho

Mariana Baracat de Mello

Setembro/2019

Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL

Mestrado em Telecomunicações

# Sinalização FTN Tempo-Frequência para o GFDM: *Sphere Decoder* e Avaliação de Desempenho

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Telecomunicações como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Telecomunicações.

Author: Mariana Baracat de Mello

Orientador: Prof. Dr. Luciano Leonel Mendes

Santa Rita do Sapucaí

2019

Mello, Mariana Baracat de
M527s
Sinalização FTN Tempo-Frequência para o GFDM: Sphere Decoder e Avaliação de Desempenho. / Mariana Baracat de Mello. – Santa Rita do Sapucaí, 2019.
90p.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Leonel Mendes.
Dissertação de Mestrado em Telecomunicações – Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL.
Inclui bibliografia.

1. Formas de onda não-ortogonais 2. Modulação multiportadora 3. Sphere decoder 4. Faster than Nyquist 5. Comunicações sem fio 6. Mestrado em Telecomunicações. I. Mendes, Luciano Leonel. II. Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL. III. Título.

CDU 621.39

Ficha Catalográfica elaborada pelo Bibliotecário da Instituição
CRB6-2718 – Paulo Eduardo de Almeida

Biblioteca "Ministro Olavo Bilac Pinto"

# Folha de Aprovação

Dissertação apresentada e aprovada em 23 de Setembro de 2019.

---

**Prof. Dr. Luciano Leonel Mendes**
INATEL

---

**Prof. Dr. Dayan Adionel Guimarães**
INATEL

---

**Prof. Dr. José Ferreira de Rezende**
Universidade Federal do Rio de Janeiro-
UFRJ

---

**Prof. Dr. José Marcos Câmara Brito**
Coordenador do Curso de Mestrado

Santa Rita do Sapucaí
2019

*Ao meu avô, Benedicto.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e em especial à minha família e ao meu namorado, pelo apoio incondicional. Agradeço ao Prof. Luciano, por orientar e encorajar meus estudos. Também a todos os amigos e colegas que contribuíram na elaboração desta dissertação. Agradeço à secretária do mestrado, Gisele, por toda a atenção que teve comigo durante estes anos. E, por fim, ao Inatel, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e ao projeto 5G-RANGE por financiarem parcialmente este trabalho.

*"A educação é a arma mais poderosa que temos para mudar o mundo."*

*-Nelson Mandela*

# Resumo

Esta dissertação propõe uma maneira de melhorar a eficiência espectral do *generalized frequency division multiplexing* (GFDM) através dos princípios da sinalização *faster than Nyquist* (FTN), sem penalidades na taxa de erro. Isto é obtido subamostrando a grade de tempo-frequência, introduzindo assim uma interferência controlada no sistema. Este trabalho apresenta um esquema de detecção baseado no algoritmo *sphere decoder* (SD) para o receptor e seu desempenho é avaliado em termos de taxa de erro de bit (BER) sob diferentes modelos de canal. O SD proposto possui uma complexidade computacional menor que o *maximum likelihood* (ML), sem perdas significativas de desempenho, mesmo em cenários de alta interferência, provando que o esquema FTN-GFDM é capaz de alcançar alta eficiência espectral considerando os diferentes canais analisados.

**Palavras-chave**: Formas de onda não-ortogonais, modulação de multiportadora, *Sphere Decoder*, Faster than Nyquist, comunicações sem fio.

# Abstract

This dissertation proposes a way to improve the spectral efficiency of generalized frequency division multiplexing (GFDM) through the principles of faster than Nyquist (FTN) signaling, without error rate penalties. This is obtained by undersampling the time-frequency grid, introducing controlled interference to the system. At the receiver, a detection scheme based on the sphere decoder (SD) algorithm is proposed, and its performance is evaluated in terms of bit error rate (BER) under different channel models. The proposed SD has a computational complexity smaller than the maximum likelihood (ML), without presenting significant BER performance loss, even in high interference scenarios, proving that the FTN-GFDM scheme is able to achieve high spectral efficiency in the channels analyzed.

**Keywords**: Non-orthogonal waveforms, multicarrier modulation, Sphere Decoder, Faster than Nyquist, wireless communications.

# Lista de ilustrações


Figura 2.1 – *Exemplo de resposta ao impulso do filtro protótipo, considerando* $M = 7$ *e* $K = 8$. . . . . 8

Figura 2.2 – *Valor absoluto da matriz de transmissão GFDM para os pulsos (a) Dirichlet, (b) raised cosine e (c) root raised cosine, com* $M = 7$ *e* $K = 8$. . . 9

Figura 2.3 – *Exemplo de matriz de interferências para M e K genéricos.* . . . . . 11

Figura 2.4 – *Valor absoluto da matriz de interferências GFDM para os pulsos (a) Dirichlet, (b) raised cosine e (c) root raised cosine, com* $M = 7$ *e* $K = 8$. 12

Figura 2.5 – *Diagrama em blocos simplificado do GFDM.* . . . . . 13

Figura 2.6 – *(a) Nyquist e (b) Faster-than-Nyquist com* $M = 6$ *e pulsos sinc no domínio do tempo.* . . . . . 14

Figura 2.7 – *Comparação entre as constelações do sinal FTN QPSK, para diferentes valores de* $\tau$. . . . . 15

Figura 2.8 – *Diagrama em blocos simplificado da sinalização Faster-than-Nyquist.* . . 17

Figura 2.9 – *Diagrama em blocos do SEFDM.* . . . . . 18

Figura 3.1 – *Diagrama de transmissão FTN-GFDM.* . . . . . 23

Figura 3.2 – *Comparação entre as matrizes de transmissão GFDM e FTN-GFDM, para pulsos Dirichlet e RRC (*$\beta = 0,5$*) com* $\bar{P} = 5$ *períodos e* $\bar{S} = 10$ *amostras por período.* . . . . . 25

Figura 3.3 – *Diagrama em blocos do transceptor FTN-GFDM.* . . . . . 26

Figura 3.4 – *Comparação entre as matrizes de coeficientes de correlação GFDM e FTN-GFDM, para pulsos Dirichlet e RRC (*$\beta = 0,5$*) com* $\bar{P} = 5$ *períodos e* $\bar{S} = 10$ *amostras por período.* . . . . . 27

Figura 4.1 – *Diagrama em blocos do transceptor FTN-GFDM.* . . . . . 31

Figura 4.2 – Algoritmo sphere decoder considerando o vetor recebido $\mathbf{r}$ e raio $\rho$. . . . . 32

Figura 4.3 – Árvore de busca do algoritmo SD. . . . . 38

Figura 5.1 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com pulso protótipo Dirichlet, com e sem codificação polar e com detecção ML.* . . . . . 44

Figura 5.2 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com pulso protótipo retangular, com e sem codificação polar e com detecção ML.* . . . . . 45
Figura 5.3 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com compressão no tempo e detecção SD.* 46
Figura 5.4 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com compressão na frequência e detecção SD.* . . . . . 47
Figura 5.5 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com compressão tempo e frequência e detecção SD.* . . . . . 48
Figura 5.6 – *SER para o FTN-GFDM* 4*-QAM com compressão na frequência e detecção SD.* . . . . . 49
Figura 5.7 – *Complexidade em função dos valores de SNR.* . . . . . 51

# Lista de tabelas

Tabela 2.1 – *Comparação entre as formas de onda apresentadas.* . . . . . 19
Tabela 3.1 – *Relação entre os parâmetros FTN-GFDM.* . . . . . 29
Tabela 5.1 – *Modelos de Canais* . . . . . 41
Tabela 5.2 – *Parâmetros de sistema considerados nas Fig. 5.1 e 5.2* . . . . . 43
Tabela 5.3 – *Parâmetros do FTN-GFDM para as Fig. 5.3 e 5.4* . . . . . 45
Tabela 5.4 – *Parâmetros do codificador polar considerados nas Fig. 5.3 e 5.4* . . . . 46
Tabela 5.5 – *Parâmetros de sistema considerados na Fig. 5.5* . . . . . 47
Tabela 5.6 – *Parâmetros de sistema considerados na Fig. 5.6* . . . . . 49
Tabela 5.7 – *Comparação entre a complexidade de detecção SD e ML* . . . . . 50

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| 3GPP | (*third generation partnership project*) |
| 4G | (*fourth generation cellular network*) quarta geração de redes celulares |
| 5G | (*fifth generation cellular network*) quinta geração de redes celulares |
| AWGN | (*additive Gaussian white noise*) ruído branco Gaussiano aditivo |
| BER | (*bit error rate*) taxa de erro de bit |
| BPSK | (*binary phase shift keying*) modulação por deslocamento de fase binária |
| CP | (*cyclic prefix*) prefixo cíclico |
| eMBB | (*enhanced mobile broadband*) banda larga móvel melhorada |
| FSC | (*frequency-selective channel*) canal seletivo em frequência |
| FSD | (*fixed-complexity sphere decoder*) decodificador esférico de complexidade fixa |
| FTN | (*faster-than-Nyquist*) mais rápido que Nyquist |
| GFDM | (*generalized frequency division multiplexing*) multiplexação por divisão de frequência generalizada |
| ICI | (*intercarrier interference*) interferência interportadora |
| IID | (*independent and identically distributed*) independentes e identicamente distribuídos |
| ISI | (*intersymbol interference*) interferência intersimbólica |
| IoT | (*Internet of things*) Internet das coisas |

| | |
|---|---|
| LDPC | (*low-density parity-check*) verificação de paridade de baixa densidade |
| MAP | (*maximum a posteriori*) máximo a posteriori |
| MF | (*matched filter*) filtro casado |
| MFTN | (*multi-carrier faster-than-Nyquist*) mais rápido que Nyquist multiportadora |
| MIMO | (*multiple-input multiple-output*) múltiplas entradas e múltiplas saídas |
| ML | (*maximum likelihood*) máxima verossimilhança |
| MLSE | (*maximum likelihood sequence estimation*) estimação de sequência de máxima verossimilhança |
| MMSE | (*minimum mean square error*) erro quadrático médio mínimo |
| MPA | (*message passing algorithm*) algoritmo de passagem de mensagem |
| OFDM | (*orthogonal frequency division multiplexing*) multiplexação por divisão de frequência ortogonal |
| OOBE | (*out-of-band emission*) emissão fora da faixa |
| QAM | (*quadrature amplitude modulation*) modulação de amplitude em quadratura |
| QPSK | (*quadrature phase shift keying*) modulação de deslocamento de fase em quadratura |
| RRC | (*raised-cosine*) cosseno elevado |
| RRC | (*root-raised-cosine*) raíz de cosseno elevado |
| SC-FDE | (*single-carrier frequency domain equalization*) equalização de domínio da frequência de portadora única |
| SD | (*sphere decoder*) decodificador esférico |
| SEFDM | (*spectrally effcient frequency division multiplexing*) multiplexação por divisão de frequência espectralmente eficiente |

| | |
|---|---|
| SER | (*symbol error rate*) taxa de erro de símbolo |
| SIC | (*successive interference cancellation*) cancelamento sucessivo de interferência |
| SNR | (*signal-to-noise ratio*) relação sinal-ruído |
| TVC | (*time-variant channel*) canal variante no tempo |
| ZF | (*zero forcing*) retorno ao zero |

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $N$ | Número de símbolos do bloco GFDM |
| $K$ | Número de subportadoras |
| $M$ | Número de subsímbolos |
| $d_{k,m}$ | Símbolo transmitido pela $k$-ésima subportadora e $m$-ésimo subsímbolo |
| $g_{k,m}[n]$ | Filtro protótipo circularmente deslocado para o $m$-ésimo subsímbolo e modulado pela $k$-ésima subportadora |
| $\langle\cdot\rangle_N$ | Módulo $N$ |
| $\exp(\cdot)$ | Função exponencial |
| $j$ | Unidade imaginária |
| $\mathbf{A}$ | Matriz de transmissão |
| $\mathbf{g}_{k,m}$ | Vetor formado com as amostras de $g_{k,m}[n]$ |
| $\mathbf{x}$ | Vetor transmitido |
| $\mathbf{d}$ | Vetor de símbolos de dados transmitidos |
| $\mathbf{y}$ | Vetor recebido |
| $\mathbf{H}$ | Matriz circulante da resposta ao impulso do canal |
| $\mathbf{h}$ | Vetor que contém a resposta ao impulso do canal |
| $\mathbf{w}$ | Vetor AWGN |
| $\sigma^2$ | Variância do ruído AWGN |
| $\mathbf{y}_{\text{eq}}$ | Vetor equalizado |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{F}_{\mathrm{N}}$ | Matriz de Fourier $N \times N$ |
| $\mathbf{y}_{\mathrm{eq}}$ | Vetor recebido equalizado |
| $\mathbf{B}$ | Matriz de demodulação |
| $\hat{\mathbf{d}}$ | Vetor de símbolos estimados |
| $\mathbf{B}_{\mathrm{MF}}$ | Matriz de demodulação MF |
| $\mathbf{B}_{\mathrm{ZF}}$ | Matriz de demodulação ZF |
| $\mathbf{B}_{\mathrm{MMSE}}$ | Matriz de demodulação MMSE |
| $[\cdot]^{\mathrm{H}}$ | Matriz Hermitiana |
| $[\cdot]^{-1}$ | Matriz inversa |
| $\mathbf{R}_w$ | Matriz de covariância do ruído |
| $E$ | Energia do sinal |
| $\mathbf{I}_N$ | Matriz identidade $N \times N$ |
| $\mathbf{G}$ | Matriz de interferências |
| $T$ | Período de símbolo |
| $T'$ | Período de símbolo FTN |
| $g(t)$ | Resposta ao impulso do filtro protótipo |
| $x(t)$ | Sinal transmitido no domínio do tempo |
| $d_m$ | Símbolo transmitido na $m$-ésima janela de sinalização |
| $\tau$ | Fator de compressão do sinal no domínio do tempo |
| $w(t)$ | Ruído AWGN |
| $r(t)$ | Sinal na saída do filtro casado |
| $g^*(-t)$ | Filtro casado com o filtro protótipo $g(t)$ |
| $\bar{w}(t)$ | Ruído colorido |
| $\bar{\mathbf{w}}$ | Vetor com amostras de ruído colorido |

| | |
|---|---|
| $G_{m,m'}$ | Elemento da matriz $\mathbf{G}$ que representa a ISI entre os símbolos $m$ e $m'$ |
| $\mu$ | Distância Euclidiana |
| $\mu_{\min}$ | Distância Euclidiana mínima |
| $[\cdot]^{\mathrm{T}}$ | Matriz transposta |
| $e_m$ | Diferença entre os símbolos $d_m$ e $d'_m$ |
| $\mathbf{e}$ | Vetor erro |
| $x_d(t)$ | Sinal transmitido correspondente a sequência de símbolos $\mathbf{d}$ |
| $x_{d'}(t)$ | Sinal transmitido correspondente a sequência de símbolos $\mathbf{d'}$ |
| $E_b$ | Energia média por bit |
| $\|.\|$ | Norma Euclidiana |
| $\xi^N$ | Conjunto com todas as sequências de símbolos de dados |
| $d_k$ | Símbolo de dado modulado na $k$-ésima subportadora |
| $\alpha$ | Fator de compressão das subportadoras na frequência |
| $\Delta f$ | Separação entre as subportadoras SEFDM |
| $A_{n,k}$ | $n$-ésima amostra da $k$-ésima subportadora da matriz de subportadoras $\mathbf{A}$ |
| $Q$ | Número de amostras do sinal SEFDM no domínio do tempo |
| $\phi$ | Fator de sobreamostragem |
| $\bar{N}$ | Número de amostras do filtro protótipo |
| $\bar{P}$ | Períodos do filtro protótipo |
| $\bar{S}$ | Número de amostras por período do filtro protótipo |
| $\bar{K}$ | Separação dos subsímbolos no tempo |
| $\bar{M}$ | Separação das subportadoras na frequência |
| $v_t$ | Fator de compressão do FTN-GFDM no tempo |
| $v_f$ | Fator de compressão do FTN-GFDM na frequência |

| | |
|---|---|
| $\lfloor . \rfloor$ | Maior inteiro menor ou igual ao argumento |
| $\bar{v_t}$ | Fator de compressão corrigido no tempo |
| $\bar{v_f}$ | Fator de compressão corrigido na frequência |
| $\bar{x}[n]$ | Sinal FTN-GFDM transmitido |
| $R_b$ | Taxa de bits do sinal FTN-GFDM |
| $B_w$ | Largura de banda ocupada pelo sinal FTN-GFDM |
| $T_s$ | Período de amostragem do sinal FTN-GFDM |
| $R_c$ | Taxa de codificação de canal |
| $N_{\mathrm{CP}}$ | Número de amostras do CP |
| $\eta$ | Eficiência espectral |
| $\bar{\mathbf{x}}$ | Vetor FTN-GFDM transmitido |
| $J$ | Cardinalidade da modulação |
| $\rho$ | Raio inicial da esfera de busca |
| $\mathbf{Q}$ | Matriz ortogonal da fatoração QR |
| $\mathbf{R}$ | Matriz triangular superior da fatoração QR |
| $\rho_{N-1}$ | Raio de busca do nível $N-1$ |
| $\lceil . \rceil$ | Menor inteiro maior ou igual ao argumento |
| $\bar{\mathbf{z}}$ | Pseudo-inversa Moore-Penrose de $\mathbf{r}$ |
| chol$\{.\}$ | Decomposição Cholesky |
| $\mathbf{L}$ | Matriz triangular superior da decomposição Cholesky da matriz $\mathbf{G}$ |
| $P_{b\mathrm{AWGN}}(e)$ | Probabilidade de erro de bit para o canal AWGN |
| $P_{b\mathrm{FSC}}(e)$ | Probabilidade de erro de bit para o canal FSC |
| $P_{b\mathrm{TVC}}(e)$ | Probabilidade de erro de bit para o canal TVC |
| $\mathcal{H}[k]$ | Resposta em frequência do canal |

| | |
|---|---|
| $N_0$ | Densidade de potência de ruído |
| $\mathfrak{R}$ | Parte real |
| $\mathfrak{Im}$ | Parte imaginária |
| $P_{\text{AWGN}}(e)$ | Probabilidade de erro de símbolo para o canal AWGN |
| $P_{\text{FSC}}(e)$ | Probabilidade de erro de símbolo para o canal FSC |
| $P_{\text{TVC}}(e)$ | Probabilidade de erro de símbolo para o canal TVC |
| $\beta$ | Fator de *roll-off* |

# Sumário


| | | |
|---|---|---|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | Motivação | 1 |
| 1.2 | Revisão de Literatura | 3 |
| 1.3 | Escopo e Objetivos | 4 |
| 1.4 | Metodologia | 4 |
| 1.5 | Principais Contribuições | 5 |
| 1.6 | Organização | 5 |
| 2 | ESTUDO DE FORMAS DE ONDA NÃO ORTOGONAIS | 7 |
| 2.1 | Generalized Frequency Division Multiplexing | 7 |
| 2.2 | Sinalização Faster-than-Nyquist | 13 |
| 2.3 | Spectrally Efficient Frequency Division Multiplexing | 17 |
| 2.4 | Conclusões | 20 |
| 3 | INTEGRAÇÃO DO GFDM COM O FTN COM COMPRESSÃO NO TEMPO E NA FREQUÊNCIA | 21 |
| 3.1 | Conclusões | 28 |
| 4 | SPHERE DECODER PARA O ESQUEMA FTN-GFDM | 31 |
| 4.1 | Algoritmo Sphere Decoder | 31 |
| 4.2 | Algoritmo SD proposto para o esquema FTN-GFDM | 34 |
| 4.3 | Conclusões | 39 |
| 5 | AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO | 41 |
| 5.1 | Avaliação de desempenho do sinal FTN-GFDM considerando a detecção ML | 42 |
| 5.2 | Avaliação de desempenho do sinal FTN-GFDM considerando a detecção SD | 44 |
| 5.2.1 | Análise de Complexidade | 49 |
| 5.3 | Conclusões | 51 |
| 6 | CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS | 53 |
| REFERÊNCIAS | | 55 |

# Capítulo 1

# Introdução

## 1.1 Motivação

O aumento de dispositivos móveis e a implementação de novos sistemas e serviços sem fio na última década deve-se principalmente à demanda da sociedade por serviços de comunicação móvel. O avanço dos *smartphones* também mudou o perfil dos usuários, que além de consumir, estão produzindo mídia de alta densidade com dispositivos móveis de alta capacidade computacional. Serviços como *e-banking*, *e-learning* e *e-health* continuarão a crescer e a demandar mobilidade. A Internet das coisas (*Internet of things*, IoT) [1] e a banda larga móvel melhorada (*enhanced mobile broadband*, eMBB) alavancarão o volume de tráfego de dados em redes móveis sem fio nos próximos anos, tornando estas redes cada vez mais congestionadas [2]. Como o espectro é um recurso escasso e caro, a eficiência espectral tornou-se extremamente importante.

Desta forma, os principais objetivos da quinta geração de redes celulares (*fifth generation cellular network*, 5G) são:

1) aumento de capacidade;

2) conectividade massiva;

3) suporte a diversos conjuntos de serviços, aplicativos, usuários e requisitos e;

4) utilização eficiente e flexível de todos os recursos disponíveis do espectro não contíguo.

Na Europa, os dois maiores projetos que abordaram estes desafios foram o METIS [2] e o 5GNOW [3]. Em particular, o 5GNOW explorou novos esquemas de

camada física para superar os rigorosos critérios de ortogonalidade e sincronização existentes na atual multiplexação por divisão de frequência ortogonal (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM). Já o projeto METIS baseou-se na evolução das tecnologias existentes somada às novas técnicas de radiofrequência, como múltiplas entradas e múltiplas saídas (multiple-input multiple-output, MIMO) massivo, redes ultra-densas, comunicação ultra-confiável e outras, para gerar um consenso para as redes de acesso por rádio que cubra os requisitos e cenários propostos pelo 5G. Em sua segunda fase, chamada de METIS II, o projeto focou em desenvolver um esquema geral para rede de acesso por rádio e fornecer capacitadores técnicos necessários para uma integração eficiente das tecnologias desenvolvidas para o 5G.

O OFDM, forma de onda usada na quarta geração de redes celulares (*fourth generation cellular network*, 4G), não será capaz de acomodar, de forma eficiente, o aumento no volume do tráfego e a elevada taxa de dados esperada para os próximos anos [4]. É necessário considerar formas de onda alternativas que possam aumentar a flexibilidade do sistema, mantendo alta eficiência espectral e bom desempenho em termos de taxa de erro de bit (*bit error rate*, BER).

Para atender a demanda por altas taxas de dados esperada nos próximos anos, a eMBB introduz abordagens como:

1) o uso de espectro de frequência em ondas milimétricas para atingir alocações de largura de banda muito maiores;

2) a implantação de células com raio de cobertura pequeno;

3) e o uso de MIMO massivo.

Porém estas abordagens não poderão ser aplicadas em áreas remotas e rurais, uma vez que é provável que as redes de áreas remotas operem com frequências abaixo de 1 GHz e, portanto, o MIMO massivo e as ondas milimétricas não poderão ser utilizados para aumentar a taxa de dados. As pequenas células também não se aplicarão a este cenário, já que o raio de cobertura estimado para uma célula remota é de aproximadamente 50 km [5]. Deste modo, uma possível solução para alcançar maiores taxas de dados neste cenário é aumentar a eficiência espetral da forma de onda.

## 1.2 Revisão de Literatura

Para a evolução das redes de 5G, uma forma de onda mais flexível que não dependa do princípio da ortogonalidade forneceria maior grau de liberdade para a camada física. Por essa razão, técnicas de modulação não-ortogonais foram amplamente investigadas nos últimos anos [3][6][7].

Entre as possíveis formas de onda, a multiplexação por divisão de frequência generalizada (*generalized frequency division multiplexing*, GFDM) [8] se destacou pela flexibilidade, que permite englobar o OFDM [9] e a equalização de domínio de frequência de portadora única *single-carrier frequency domain equalization* (SC-FDE) como casos particulares, ao mesmo tempo em que obtém bom desempenho em termos de emissão fora da faixa (*out-of-band emission*, OOBE) e BER sem aumento significativo de complexidade [10][11].

Uma potencial forma de onda não-ortogonal candidata para as próximas versões do 5G é a sinalização mais rápida que Nyquist (*faster-than-Nyquist*, FTN) [12][13]. Esta técnica permite enviar símbolos com taxa mais elevada do que a estabelecida por Nyquist [14][15], violando a ortogonalidade entre os pulsos. O conceito de FTN foi também estendido para o domínio da frequência, onde é chamado de multiplexação por divisão de frequência espectralmente eficiente (*spectrally efficient frequency division multiplexing*, SEFDM) [16][17][18]. Neste caso, é possível melhorar a eficiência espectral do sistema OFDM, reduzindo o espaçamento entre as subportadoras.

No entanto, a detecção destes sinais é desafiada pela necessidade de extrair a informação transmitida em meio a interferência gerada pela compressão da forma de onda no domínio do tempo ou da frequência. A detecção ideal do sinal FTN requer a força bruta do detector máxima verossimilhança (*maximum likelihood*, ML), que é muito complexo para ser empregado na prática [18].

O decodificador esférico (*sphere decoder*, SD), proposto em [19], visa encontrar o vetor mais semelhante à uma versão ruidosa disponível no receptor, sem a necessidade de comparar todos os possíveis vetores pertecentes ao espaço amostral. Este algoritmo tem sido empregado com sucesso em sistemas como o *lattice code decoding* [20] e MIMO [21]. Em [22], a técnica SD foi empregada para fornecer desempenho equivalente ao ML em sistema SEFDM, com uma complexidade aceitável.

Além da forma de onda, a codificação de canal terá um papel crucial nas redes 5G. O código polar foi recentemente apresentado por Arikan [23][24] como

uma codificação de canal eficiente que provavelmente atinge a capacidade do canal para canais sem memória discretos e contínuos. O código polar pode ter uma estrutura sistemática, algoritmos de codificação e decodificação de baixa complexidade e alta flexibilidade. Devido às suas propriedades atrativas, o código polar foi escolhido para proteger os dados do canal de controle do padrão 5G proposto pelo *Third Generation Partnership Project* (3GPP) [25]. Em função do elevado grau de interesse nesta técnica de codificação por parte da comunidade acadêmica, o código polar foi selecionado para ser integrado à forma de onda FTN-GFDM, proposta neste trabalho, para fins de análise de desempenho.

## 1.3 Escopo e Objetivos

Este trabalho visa investigar os princípios da sinalização FTN, levando em conta o limite de Mazo [17], e aplicá-los no sistema GFDM, resultando em um esquema FTN-GFDM com maior eficiência espectral.

Além disso, é proposto um receptor FTN-GFDM de complexidade aceitável, baseado na técnica SD. O desempenho do esquema proposto é analisado em termos de BER levando em consideração cenários com e sem codificação de canal.

Assim, pode-se resumir os objetivos deste trabalho nos seguintes pontos:

1) Propor a integração da técnica FTN com o GFDM tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, para obter maior eficiência.

2) Propor um receptor baseado em SD para viabilizar a recepção dos dados transmitidos com uma complexidade aceitável.

3) Analisar o desempenho do sistema proposto, considerando a sua integração com código polar, em diferentes canais de comunicação.

## 1.4 Metodologia

Em um primeiro momento foi realizada uma pesquisa bibliográfica e o estudo da literatura relevante sobre formas de ondas propostas para o 5G, bem como o estudo dos algoritmos para geração e recepção das formas de onda. Com base nas informações obtidas na pesquisa bibliográfica, foi proposta uma reformulação das expressões de geração do sinal GFDM para que este esquema englobasse o FTN e o SEFDM. Em seguida, formulou-se um algoritmo baseado em SD para estimar os dados na presença da interferência introduzida no processo

de modulação. Por fim, uma simualação computacional foi construída para avaliar o desempenho do sistema em termos de BER em diferentes cenários. Nesta etapa, o código polar foi considerado como codificação de canal.

## 1.5 Principais Contribuições

As principais contribuições desta dissertação são:

1) fundamentação matemática para demonstrar que o FTN pode ser integrado com o GFDM para prover ganhos de eficiência espectral através da compressão nos domínios do tempo e da frequência;

2) comprovação por simulação computacional de que o FTN-GFDM atinge o mesmo desempenho em termos de BER que os esquemas ortogonais, quando o método de estimação de máxima verossimilhança é empregado e;

3) adequação do SD para detecção dos sinais transmitidos empregando o FTN-GFDM.

Durante o desenvolvimento desta dissertação, os seguintes artigos foram elaborados:

- MELLO, M.; MENDES, L. Time-frequency FTN signaling for GFDM. In: *WS01 - 5G for Remote Areas including the Arctic (5G-RAA) (ISWCS19-WS01)*. Oulu, Finland: [S.l.: s.n.], 2019.
- MELLO, M.; MENDES, L.; BARBOSA, T. Sphere detection for FTN-GFDM scheme. In: *IEEE Communications Letters*. Em preparação para submissão.
- MELLO, M.; MENDES, L.; BARBOSA, T. Frequency FTN signaling for GFDM. In: *Journal of Communication and Information Systems (JCIS)*. Em preparação para submissão.

## 1.6 Organização

O Capítulo 2 apresenta uma breve introdução sobre os esquemas de transmissão e recepção das formas de onda GFDM, FTN e SEFDM. No Capítulo 3 é proposta a modificação do GFDM para que esta forma de onda opere como FTN e SEFDM. O Capítulo 4 apresenta o algoritmo SD original, e também

propõe modificações para que este algoritmo possa ser usado para detectar o sinal FTN-GFDM, com complexidade menor que o ML. No Capítulo 5 o desempenho do algoritmo de detecção proposto é avaliado em termos de BER para o esquema FTN-GFDM através de simulações. Os resultados obtidos são comparados com os sistemas convencionais. Por fim, o Capítulo 6 apresenta a conclusão desta dissertação e as perspectivas de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

# Estudo de Formas de Onda Não Ortogonais

As formas de onda não ortogonais apresentam maior flexibilidade em relação às formas de onda ortogonais. A seguir, os princípios do GFDM, FTN e SEFDM são apresentados, visando estabelecer as bases para propor a integração destes esquemas.

## 2.1 Generalized Frequency Division Multiplexing

O GFDM é um esquema de comunicação multiportadora baseado em blocos [26][27]. Neste esquema, cada bloco transmite $N = KM$ símbolos de dados, divididos em $K$ subportadoras transportando $M$ subsímbolos cada uma.

O GFDM utiliza convolução circular entre o vetor de dados e o pulso de transmissão de cada subportadora, de modo que a forma de onda possui $N$ amostras para representar os $KM$ símbolos de dados. O filtro protótipo com comprimento de $N$ amostras é rotacionado de $K$ amostras a cada subsímbolo. A Figura 2.1 mostra a resposta ao impulso do filtro protótipo com 56 amostras, resultantes de $M = 7$ e $K = 8$.

Desta forma, cada símbolo $d_{k,m}$ é carregado por um pulso dado por

$$g_{k,m}[n] = g[\langle n - mK \rangle_N] \exp\left(j2\pi \frac{k}{K} n\right), \tag{2.1}$$

onde $n = 0, \cdots, N-1$, $\langle \cdot \rangle_N$ é a operação módulo $N$ e $g[n]$ é a resposta ao impulso do filtro protótipo. O sinal $g_{k,m}[n]$ representa o filtro protótipo deslocado para a $k$-ésima subportadora e $m$-ésimo subsímbolo. As respostas ao impulso podem ser

organizadas em uma matriz de transmissão $\mathbf{A}$, definida por

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccccccc} \mathbf{g}_{0,0} & \mathbf{g}_{1,0} & \cdots & \mathbf{g}_{K-1,0} & \mathbf{g}_{0,1} & \cdots & \mathbf{g}_{K-1,M-1} \end{array} \right], \tag{2.2}$$

onde $[\mathbf{g}_{k,m}]_n = g_{k,m}[n]$. A Figura 2.2 mostra o valor absoluto da matriz de transmissão GFDM supondo os seguintes filtros protótipos: Dirichlet [28], cosseno elevado (*raised cosine*, RC) e raíz de cosseno elevado (*root raised cosine*, RRC). Em todos os casos foram considerados $M = 7$ subsímbolos e $K = 8$ subportadoras. Nesta Figura, cada coluna da matriz $\mathbf{A}$ é uma versão do pulso protótipo deslocado no tempo e na frequência. Deste modo, as 8 primeiras colunas representam as $K = 8$ subportadoras do primeiro subímbolo. No segundo subsímbolo, o filtro protótipo é rotacionado em $K$ amostras e as colunas com índices entre 8 e 15 representam suas subportadoras, e assim por diante.

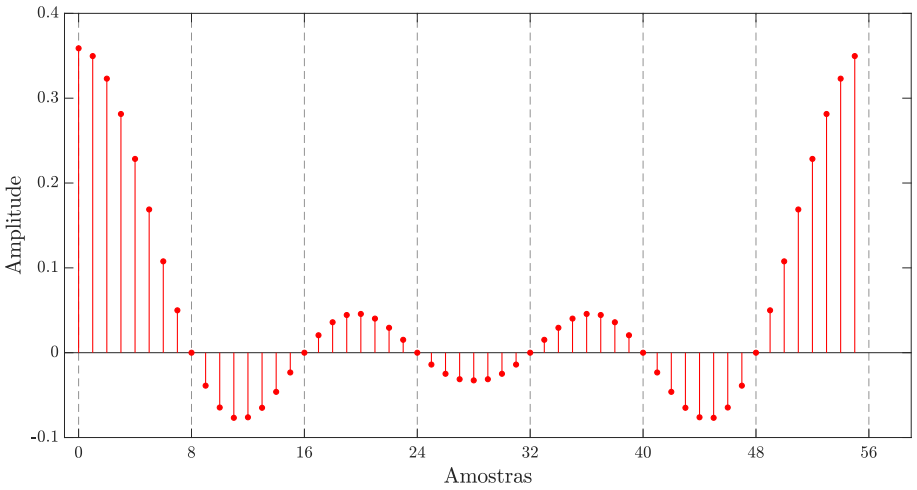



Figura 2.1 – *Exemplo de resposta ao impulso do filtro protótipo, considerando $M = 7$ e $K = 8$.*

O sinal de transmissão $\mathbf{x}$ pode ser escrito como

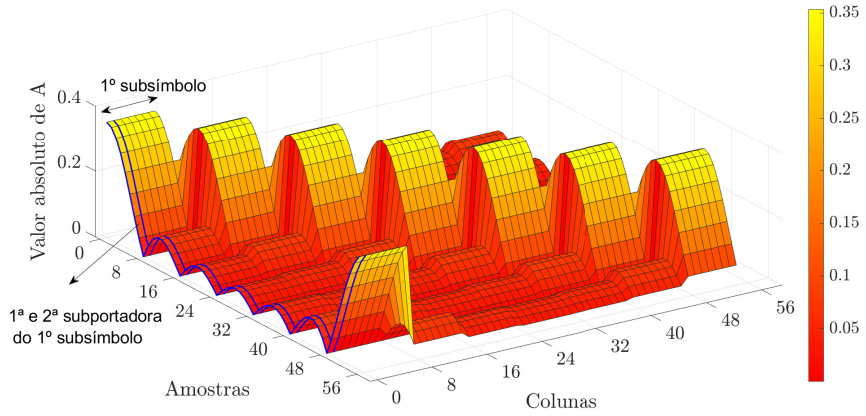
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{d}, \tag{2.3}$$

onde $\mathbf{d} = [d_{0,0} \;\; d_{1,0} \;\; \cdots \;\; d_{K-1,0} \;\; d_{0,1} \;\; \cdots \;\; d_{K-1,M-1}]^{\mathrm{T}}$ é o vetor de símbolos de dados complexos.

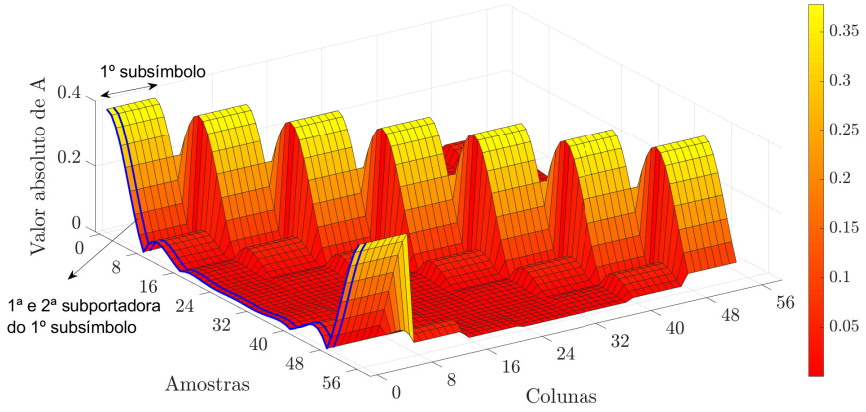
Um prefixo cíclico (*cyclic prefix*, CP) é inserido no início de cada bloco GFDM, mitigando a interferência entre blocos causada por canais com múltiplos percursos. No receptor, o CP é removido e o sinal GFDM recebido é dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}, \tag{2.4}$$

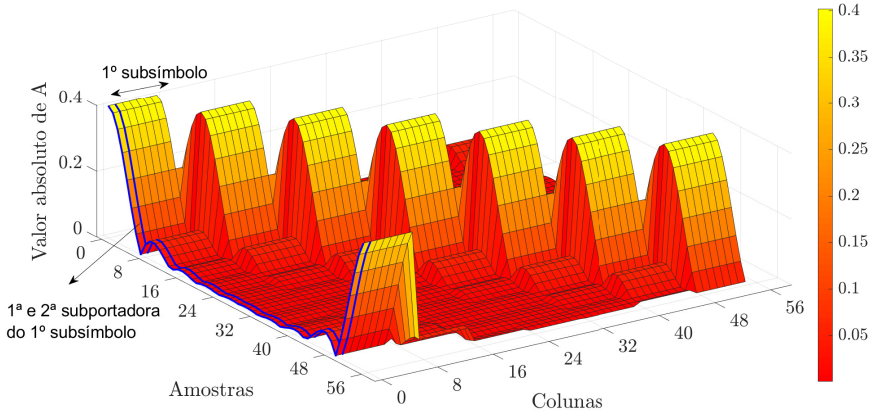
onde o vetor $\mathbf{w}$ representa o ruído Gaussiano branco aditivo (*additive Gaussian white noise*, AWGN) com média zero e variância $\sigma^2$ e $\mathbf{H}$ é uma matriz circulante




(a) *Dirichlet*




(b) *Raised cosine* ($\beta = 0,5$)




(c) *Root raised cosine* ($\beta = 0,5$)

Figura 2.2 – *Valor absoluto da matriz de transmissão GFDM para os pulsos (a) Dirichlet, (b) raised cosine e (c) root raised cosine, com* $M = 7$ *e* $K = 8$.

com dimensão $(N \times N)$ baseada na resposta ao impulso do canal, $\mathbf{h}$. A matriz $\mathbf{H}$ representa a matriz de convolução entre o vetor $\mathbf{x}$ e a resposta ao impulso $\mathbf{h}$. Por

causa do CP, a resposta resultante é a convolução circular, de modo que

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & h_{L-1} & \cdots & h_1 \\ \vdots & h_0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ h_{L-1} & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & h_{L-1} \\ 0 & h_{L-1} & \ddots & h_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{L-2} & \cdots & h_0 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Considerando que o receptor é capaz de estimar a resposta ao impulso do canal, o sinal equalizado é obtido por

$$\mathbf{y_{eq}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}. \tag{2.6}$$

Esta operação pode ser realizada no domínio da frequência por

$$\mathbf{y_{eq}} = {\mathcal{F}_{\mathrm{N}}}^{-1}(\mathcal{F}_{\mathrm{N}}\mathbf{H})^{-1}\mathcal{F}_{\mathrm{N}}\mathbf{y}, \tag{2.7}$$

onde $\mathcal{F}_{\mathrm{N}}$ é a matriz de Fourier com dimensão $(N \times N)$.

Em seguida, o vetor equalizado $\mathbf{y}_{\mathrm{eq}}$ é demodulado pela matriz de demodulação $\mathbf{B}$, e o vetor de símbolos estimados $\hat{\mathbf{d}}$ é definido por

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{B}\mathbf{y}_{\mathrm{eq}}. \tag{2.8}$$

Três diferentes demoduladores lineares podem ser usados no lado do receptor: filtro casado (*matched filter*, MF), retorno ao zero (*zero forcing*, ZF) e erro quadrático médio mínimo (*minimum mean square error*, MMSE) [8][27][29]. Assim, o vetor de símbolo de dados pode ser recuperado da seguinte maneira [27]

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{cases} \mathbf{B}_{\mathrm{MF}}\mathbf{y}_{\mathrm{eq}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}_{\mathrm{eq}} \\ \mathbf{B}_{\mathrm{ZF}}\mathbf{y}_{\mathrm{eq}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_{\mathrm{eq}} \\ \mathbf{B}_{\mathrm{MMSE}}\mathbf{y} = \left(\mathbf{R}_{\mathrm{w}} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $[\cdot]^{H}$ é a matriz Hermitiana, $[\cdot]^{-1}$ representa a matriz inversa, $\mathbf{R}_w = \frac{\sigma^2}{E}\mathbf{I}_{\mathrm{N}}$ é matriz de covariância do ruído ponderada pela energia do sinal, $E$, e $\mathbf{I}_{\mathrm{N}}$ é a matriz identidade com dimensão $(N \times N)$.

O receptor MF maximiza a relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio*, SNR), mas não remove completamente a interferência interportadora (*intercarrier interference*, ICI) e a interferência intersimbólica (*intersymbol interference*, ISI),

resultando em perda de desempenho [30]. Para o receptor ZF, a matriz de modulação precisa ser inversível. A solução ZF elimina ICI e ISI, mas pode causar amplificação do ruído, o que afeta o desempenho em baixa SNR. Finalmente, a matriz MMSE pode ser usada como uma relação de compromisso entre MF e ZF. O MMSE atenua o problema de amplificação de ruído em baixa SNR e minimiza o impacto da ISI e ICI em alta SNR. Observe que, neste caso, o sinal recebido não é previamente equalizado, uma vez que o MMSE realiza a equalização e a demodulação do GFDM conjuntamente.

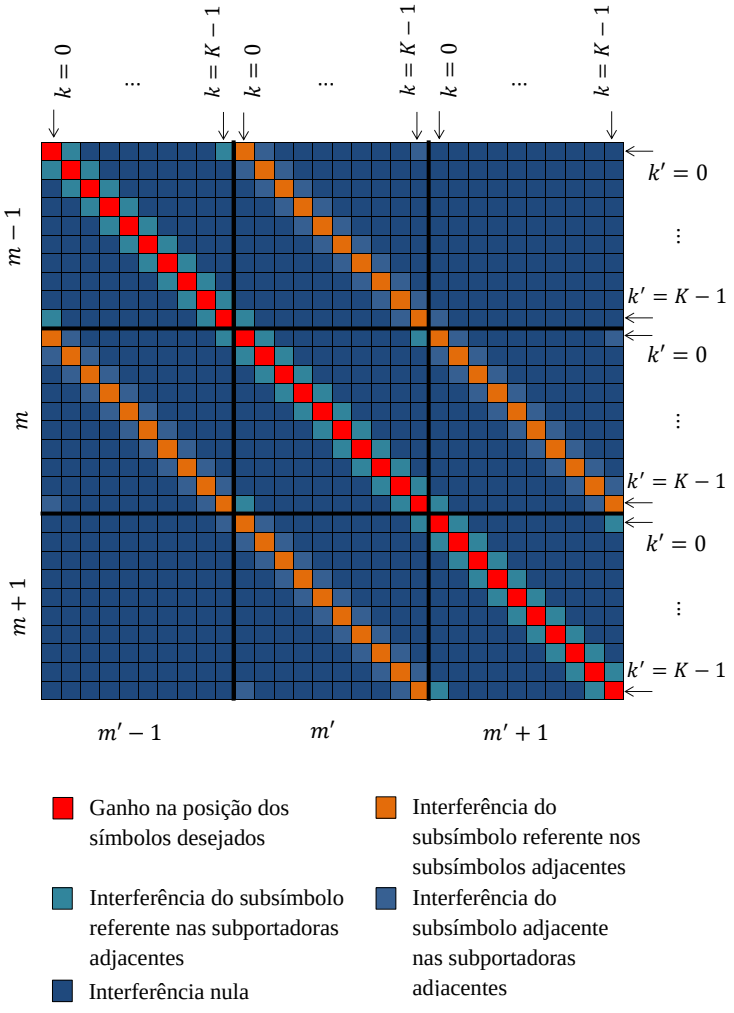
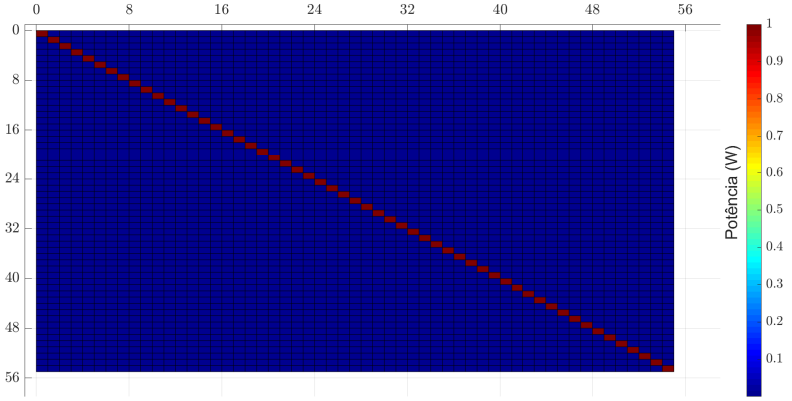
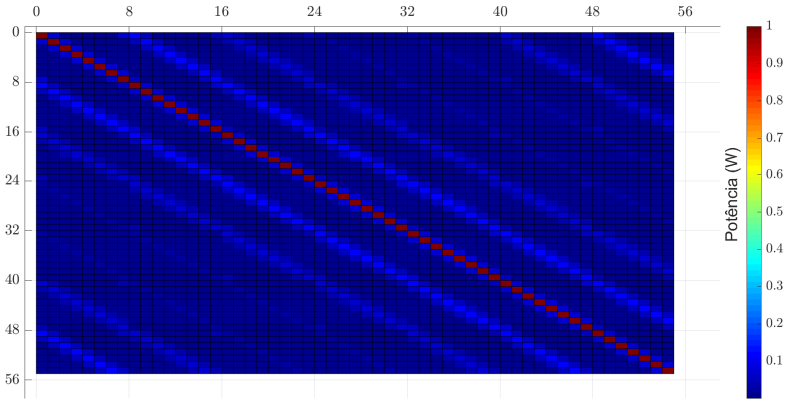



Figura 2.3 – *Exemplo de matriz de interferências para M e K genéricos.*

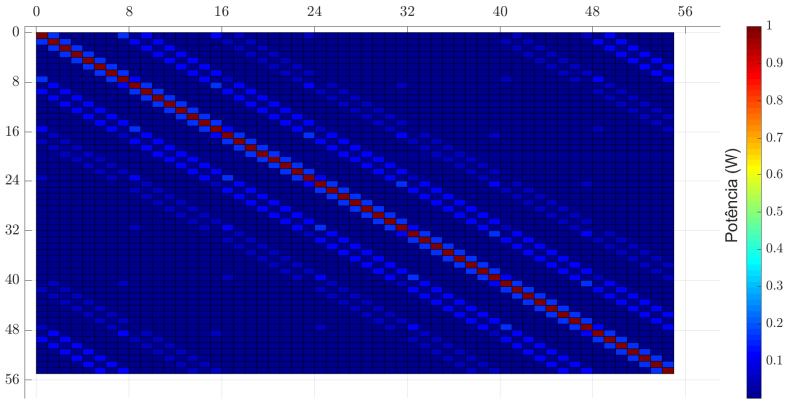
Quando o MF é empregado, o produto $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ pode ser usado para avaliar a ISI e a ICI no sinal GFDM recebido. Os elementos da matriz $\mathbf{G}$ representam a correlação entre $\mathbf{g}_{k,m}$ e $\mathbf{g}_{k',m'}$, como mostra a Figura 2.3. Portanto, a ISI e a




(a) *Dirichlet*




(b) *Raised cosine* ($\beta = 0,5$)




(c) *Root raised cosine* ($\beta = 0,5$)

Figura 2.4 – *Valor absoluto da matriz de interferências GFDM para os pulsos (a) Dirichlet, (b) raised cosine e (c) root raised cosine, com* $M = 7$ *e* $K = 8$.

ICI dependem do filtro protótipo escolhido. A Figura 2.4 mostra o valor absoluto da matriz $\mathbf{G}$, referentes as matrizes $\mathbf{A}$ apresentadas na Figura 2.2. A diagonal

principal da matriz **G** representa o ganho resultado do processo de modulação e demodulação nas posições dos dados transmitidos, e os outros valores representam interferências. Note que para o pulso Dirichlet não há interferência e, portanto, o sinal GFDM neste caso é ortogonal. Já para o pulso RRC a ISI é nula, pois o pulso atende ao critério de Nyquist. Porém há ICI devido ao espalhamento da resposta em frequência do filtro. Por fim, o filtro RC causa ISI e ICI ao sinal, mas a ICI é menor que para o pulso RRC, uma vez que o decaimento da resposta em frequência é mais abrupto. Então é necessário considerar a relação de compromisso entre ISI e ICI na escolha no filtro protótipo.

A Figura 2.5 apresenta o diagrama em blocos simplificado de um sistema GFDM [27]. Os símbolos de entrada são modulados pela matriz de transmissão **A**, expressa em (2.2), no bloco do modulador GFDM. As amostras na saída deste bloco formam o sinal GFDM transmitido, dado por (2.3). Em seguida, o CP é adicionado e o sinal é aplicado ao canal. No canal, o sinal sofre distorções causadas pelos múltiplos percursos e ruído AWGN, como mostrado em (2.4). Após o canal, o CP é removido e o sinal recebido é equalizado através de (2.7). Por fim, o sinal equalizado passa pelo demodulador GFDM, que pode usar três abordagens distintas: MF, ZF e MMSE, todas apresentadas em (2.9). Na saída do demodulador os símbolos poderão ser detectados ou entregues para o decodificador de canal para decodificação suave [25].

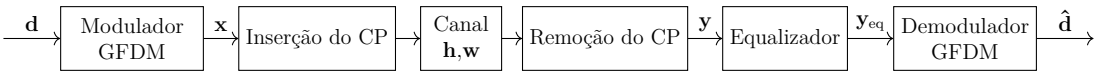



Figura 2.5 – *Diagrama em blocos simplificado do GFDM.*

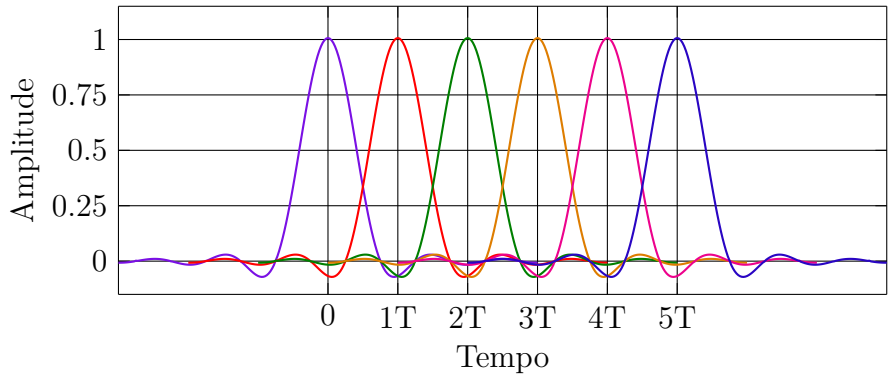
## 2.2 Sinalização Faster-than-Nyquist

A sinalização FTN é uma técnica promissora para 5G, que permite o aumento na eficiência espectral do sistema através da aceleração de pulso no tempo, isto é, substituindo o período de símbolo, $T$, por $T' < T$ [12]. Os símbolos de dados $d_m$ passam através do filtro de transmissão $g(t)$ com energia unitária $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \, dt = 1$, a cada $T'$ e, então, são enviados através do canal. Deste modo, o sinal transmitido $x(t)$ pode ser expresso por

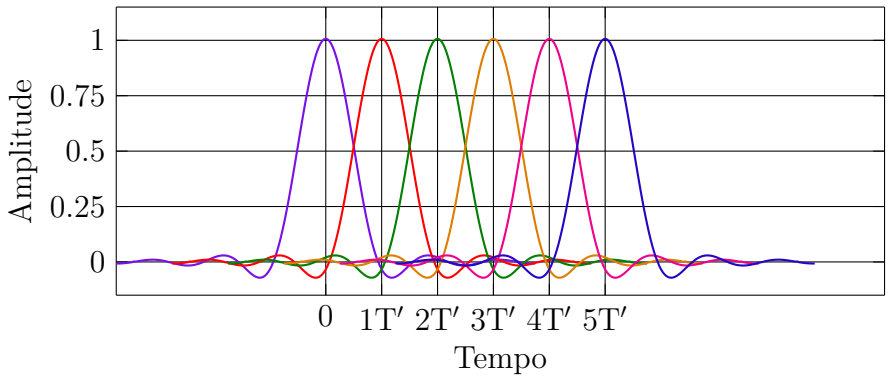
$$x(t) = \sqrt{\tau} \sum_{m=0}^{M-1} d_m g(t - mT'), \tag{2.10}$$

onde $d_m$ é o símbolo complexo transmitido na $m$-ésima janela de sinalização e $T' = \tau T$, $0 < \tau < 1$, é o novo período de símbolo. O fator $\tau$ é responsável por

acelerar o pulso ao longo do tempo e, consequentemente, causar a sobreposição entre símbolos vizinhos. A constante de normalização $\sqrt{\tau}$ é necessária para que a comparação entre a sinalização FTN e Nyquist seja justa, uma vez que este ajuste mantém constante a potência de transmissão por símbolo. A Figura 2.6 mostra um sinal ortogonal e um sinal FTN, ambos com $M = 6$ e pulso de transmissão $g(t) = \text{sinc}(t)$. Uma vez que a duração do símbolo FTN é $0,8T$, há um aumento de 25% na taxa de dados do FTN em relação à taxa de Nyquist.




(a) Nyquist $\tau = 1$.



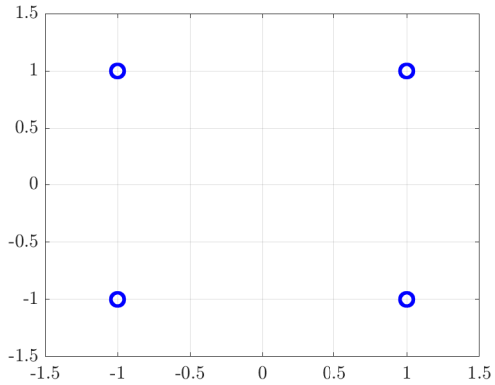

(b) Faster-than-Nyquist $\tau = 0,8$.

Figura 2.6 – *(a) Nyquist e (b) Faster-than-Nyquist com $M = 6$ e pulsos sinc no domínio do tempo.*

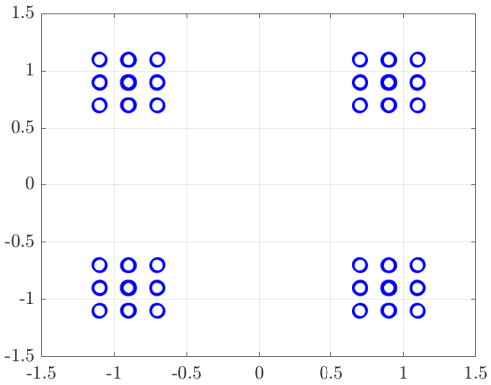
A ISI causada pela compressão também pode ser observada na constelação do sinal FTN. A Figura 2.7 mostra a constelação do sinal FTN com a modulação de deslocamento de fase em quadratura (*quadrature phase-shift keying*, QPSK) sem presença de ruído, para diferentes fatores de compressão $\tau$. É possível notar que conforme $\tau$ diminui, maior é a ISI causada no sinal e, consequetemente, mais difícil a sua detecção.

Considerando o canal AWGN, o sinal recebido é dado por

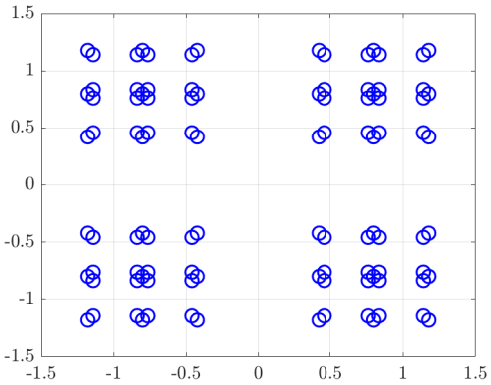
$$y(t) = x(t) + w(t). \tag{2.11}$$




(a) $\tau = 1$




(b) $\tau = 0,9$




(c) $\tau = 0,8$

Figura 2.7 – *Comparação entre as constelações do sinal FTN QPSK, para diferentes valores de* $\tau$.

No lado da recepção, o sinal é geralmente processado por um MF para extrair uma estimativa dos símbolos transmitidos. Como o critério de Nyquist para a ISI nula não é respeitado, a ISI é inserida no sinal. O sinal $r(t)$ na saída do filtro casado pode ser escrito como

$$r(t) = y(t) * g^*(-t) = \left( \sum_{m=0}^{M-1} d_m g(t - mT') \right) * g^*(-t) + \bar{w}(t), \tag{2.12}$$

onde $g^*(-t)$ é a resposta ao impulso do MF e $\bar{w}(t)$ é o ruído na saída do filtro casado. Supondo que a sincronização é perfeita no receptor, o sinal FTN após a amostragem pode ser descrito na forma vetorial como

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}\mathbf{d} + \bar{\mathbf{w}}, \tag{2.13}$$

onde $\bar{\mathbf{w}}$ é o vetor de ruído, com média zero e matriz de covariância $\sigma^2\mathbf{G}$, sendo o elemento $G_{m,m'} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - mT')g^*(t - m'T')dt$ a ISI entre os símbolos $m$ e $m'$. Logo, a ISI depende do filtro protótipo e do fator de aceleração $\tau$ [31].

Considerando que o desempenho de um sistema pode ser avaliado através da BER, a distância Euclidiana mínima é um parâmetro relevante para ser analisado [12][32]. O quadrado da distância Euclidiana entre dois vetores de símbolos, $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$, é dada por [32][33]

$$\begin{aligned}\mu^2 &= \frac{1}{2\tau E_b}\int_{m=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_d(t) - x_{d'}(t)\right|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\tau E_b}\int_{m=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}(d_m - d'_m)g(t-m\tau T)\right|^2 dt \\ &= \int_{m=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} e_m g(t-m\tau T)\right|^2 dt \\ &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e_m e_n \int_{m=-\infty}^{\infty} g(t-m\tau T)g(t-n\tau T)dt = \mathbf{e}\mathbf{G}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}, \quad (2.14)\end{aligned}$$

onde $[.]^{\mathrm{T}}$ é a matriz transposta, $\mu$ é a distância Euclidiana entre as sequências $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$, $e_m = (d_m - d'_m)/\sqrt{2\tau E_b}$ é a diferença entre as sequências, portanto, $\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{d}'$ é o vetor erro. A partir de (2.14), a distância Euclidiana mínima pode ser numericamente estimada por

$$\mu_{\min} = \min_{\mathbf{e}\neq 0}\sqrt{\mu^2}. \quad (2.15)$$

Supondo uma modulação binária de energia média unitária e pulsos ortonormais, o quadrado da distância Euclidiana mínima é igual a 2, independente do formato do pulso [13]. Mazo mostrou que para valores de $\tau$ maiores que $0,802$, a distância Euclidiana mínima permanece igual a 2 para sinalização binária com pulsos *sinc*, possibilitando aumento de aproximadamente 25% da taxa de dados em comparação com os sistemas ortogonais convencionais [12]. Assim, o valor de $\tau$ para o qual a distância Euclidiana mínima não cai abaixo do valor obtido no caso da sinalização ortogonal ficou conhecido como limite de Mazo [12][13]. Anos depois, este conceito estendeu-se às sinalizações não binárias [34], a outros pulsos de transmissão [33] e aos sistemas multiportadoras, onde ficou conhecido como limite de Mazo bidimensional [17].

A vantagem do sistema FTN é que, para um determinado $\tau$ maior que o limite de Mazo, a distância Euclidiana mínima não é afetada e, portanto, não há perda de desempenho em termos de BER. No entanto, a compressão dos pulsos aumenta a complexidade de recepção do sinal, visto que os símbolos transmitidos não podem mais ser detectados individualmente, mas precisam ser detectados como uma sequência. Os detectores lineares, como o ZF e o MMSE, apresentam baixo desempenho, pois não são capazes de mitigar a ISI. Para

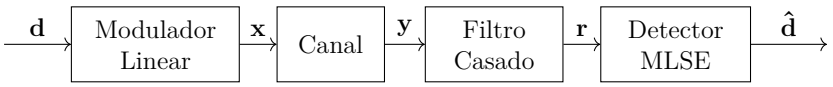



Figura 2.8 – *Diagrama em blocos simplificado da sinalização Faster-than-Nyquist.*

alcançar o desempenho ótimo, é necessário empregar um detector não-linear, como a estimação de sequência de máxima verossimilhança (*maximum likelihood sequence estimation*, MLSE) [35], após a demodulação empregando o MF, tal como ilustrado na Figura 2.8.

No diagrama em blocos da Figura 2.8, o modulador FTN é alimentado por símbolos complexos, de modo que o sinal modulado FTN é dado por (2.10). Em seguida, o sinal é aplicado ao canal AWGN resultando em (2.11). Na recepção, o sinal é demodulado pelo filtro casado e depois amostrado, como expresso em (2.13). Por fim, o detector MLSE deve encontrar um vetor $\hat{\mathbf{d}}$ que minimize a norma Euclidiana abaixo

$$\arg \min_{\hat{\mathbf{d}} \in \xi^M} \left\| \mathbf{r} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{d}} \right\|^2. \tag{2.16}$$

onde $\|.\|$ é a norma Euclidiana e $\xi^M$ é o conjunto com todas as $J^M$ possíveis sequências de símbolos de dados, de modo que $J$ representa a cardinalidade da modulação. O detector MLSE procura entre todas as sequências a que possui menor distância Euclidiana em relação ao vetor $\mathbf{r}$. Como o detector MLSE utiliza a força bruta para encontrar $\hat{\mathbf{d}}$, este possui alta complexidade computacional, impedindo o seu uso em casos práticos.

## 2.3 Spectrally Efficient Frequency Division Multiplexing

Além da compressão no domínio do tempo, a compressão no domínio da frequência do FTN também pode aumentar a eficiência espectral [32]. Em [17], a sinalização FTN também foi estudada no domínio da frequência. O SEFDM é uma técnica de modulação multiportadora não-ortogonal, na qual a separação de frequência entre as subportadoras é reduzida para melhorar a eficiência espectral [34]. Portanto, ICI é inserida no sinal, aumentando a complexidade de detecção. O sinal SEFDM no domínio do tempo é dado por

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{T}} \sum_{k=0}^{K-1} d_k \exp \frac{j2\pi k\alpha t}{T}, \tag{2.17}$$

onde $K$ é o número de subportadoras, $T$ é o período do símbolo SEFDM, $d_k$ é o símbolo de dado modulado na $k$-ésima subportadora e $\alpha$ representa o fator de

compressão de frequência das subportadoras, $0 < \alpha \leq 1$. Desta forma, a separação entre as subportadoras é dada por

$$\Delta f = \frac{\alpha}{T}, \tag{2.18}$$

onde $\Delta f$ é a separação entre as subportadoras. Para $\alpha = 1$, o sinal SEFDM corresponde ao OFDM.

Graças a sobreposição das subportadoras, a largura de banda total ocupada pelo sinal SEFDM é reduzida por um fator $(\frac{1}{\alpha} - 1)$ em relação ao OFDM [36]. Considerando que o canal é AWGN, o sinal recebido é dado por

$$y(t) = x(t) + w(t). \tag{2.19}$$

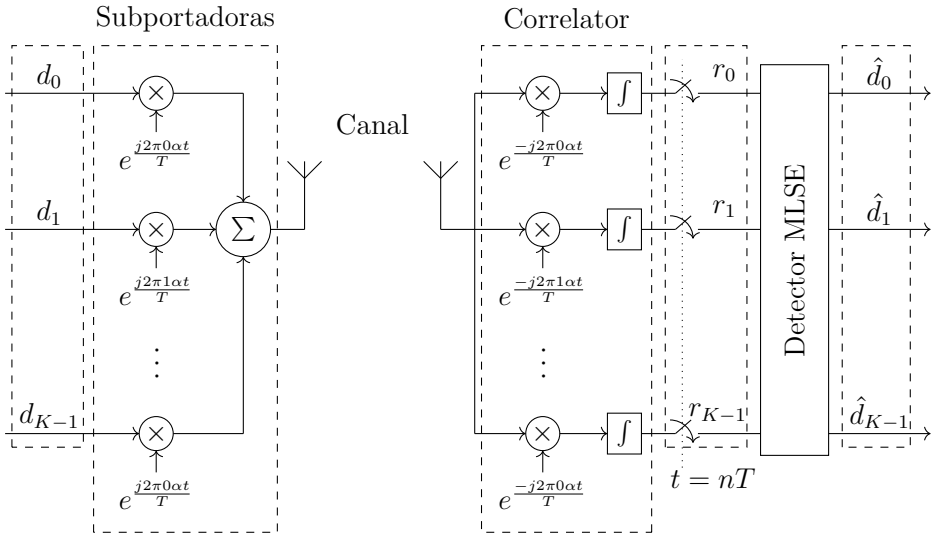



Figura 2.9 – *Diagrama em blocos do SEFDM.*

O diagrama em blocos do transceptor SEFDM é ilustrado na Figura 2.9. No transmissor, os símbolos de dados complexos são modulados pelas subportadoras, de modo que o sinal transmitido descrito em (2.17) é aplicado ao canal AWGN. No receptor, o sinal recebido dado por (2.19) passa por um correlator a fim de melhorar a SNR. Supondo que o sincronismo é perfeito, o sinal amostrado em sua saída é dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}\mathbf{d} + \bar{\mathbf{w}}, \tag{2.20}$$

onde $\mathbf{G}$ é a matriz de correlação entre a matriz de subportadoras $\mathbf{A}$ e sua Hermitiana $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ e representa a ICI do sistema SEFDM e $\bar{\mathbf{w}}$ é o vetor de ruído, cuja as amostras são correlacionadas pela matriz $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$. Os elementos de $\mathbf{A}$ são dados por

$$A_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{Q}} \exp\left[\frac{j2\pi k\alpha n}{Q}\right], \tag{2.21}$$

sendo que $Q = \phi K$ é o número de amostras no domínio do tempo, $\phi \geq 1$ é o fator de sobreamostragem e $n = 0, 1, \ldots, Q-1$.

Devido à perda de ortogonalidade entre as subportadoras, as amostras na saída do correlator conterão ICI. Portanto, receptores lineares de baixa complexidade, como ZF e MMSE, também têm baixo desempenho de em termos de BER nessa situação [18][37]. Por outro lado, o detector MLSE pode ser usado para extrair os símbolos da sequência recebida e alcançar o desempenho ótimo.

Para isto, o detector MLSE examina todas as possíveis combinações de símbolos e decide pela combinação com menor distância Euclidiana em relação ao vetor $\mathbf{r}$, de modo que

$$\arg \min_{\hat{\mathbf{d}} \in \xi^K} \left\| \mathbf{r} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{d}} \right\|^2. \tag{2.22}$$

onde $\xi^K$ é o conjunto de todas as $J^K$ combinações de símbolos de dados para o sinal SEFDM. Consequentemente, a complexidade cresce exponencialmente com o aumento $K$ e $J$, o que impede o uso do MLSE em casos práticos.

A Tabela 2.1 apresenta um resumo das principais características relativas às formas de onda apresentadas.

Tabela 2.1 – *Comparação entre as formas de onda apresentadas.*

| Parâmetros | GFDM | FTN | SEFDM |
|---|---|---|---|
| Subportadoras | $K$ | 1 | $K$ |
| Subsímbolos | $M$ | $M$ | 1 |
| $\tau$ | 1 | $< 1$ | 1 |
| $\alpha$ | 1 | 1 | $< 1$ |
| Prefixo Cíclico | Sim | Não | Sim |
| Eficiência Espectral | $\frac{MK}{MK+N_{\mathrm{PC}}}$ | $\frac{M}{M\tau}$ | $\frac{K}{K\alpha+N_{\mathrm{PC}}}$ |
| Filtro Protótipo | Arbitrário | Arbitrário | Retangular |
| Convolução | Circular | Linear | Circular |
| Benefícios | Flexibilidade | Eficiência Espectral | Eficiência Espectral |

## 2.4 Conclusões

Diferentes formas de onda estão sendo propostas para abordar cada um dos cenários previstos para as redes 5G. Essas formas de onda apresentam desvantagens nos casos para os quais elas não foram desenhadas [27]. As técnicas FTN e SEFDM apresentam vantagens em relações às demais formas de onda em aplicações e cenários onde a eficiência espectral e altas taxa de dados são necessárias. Por outro lado, a grande complexidade do receptor os tornam inadequados para aplicações de IoT. Pode-se concluir que o conjunto de formas de onda abordadas neste capítulo tem o potencial para contribuir com a evolução das redes 5G, respeitando as restrições impostas por cada cenário de aplicação.

# Capítulo 3

# Integração do GFDM com o FTN com compressão no tempo e na frequência

Existem vários modelos de sistemas mais rápido que Nyquist multiportadora (*multi-carrier faster-than-Nyquist*, MFTN), como o SEFDM, mas são todos variações da forma [13]

$$s(t) = \sqrt{\tau\alpha} \sum_{k} \left[ \sum_{m} d_{k,m} g(t - \tau m T) \right] \exp\left(-j2\pi k \alpha t / T\right), \tag{3.1}$$

onde $d_{k,m}$ é o símbolo na $m$-ésima janela de sinalização e na $k$-ésima subportadora. O MFTN intecionalmente diminui o espaçamento entre os subsímbolos e entre as subportadoras, de modo que $0 < \tau\alpha < 1$.

Similarmente ao MFTN, o GFDM também pode ser parametrizado para englobar a sinalização FTN [27]. No entanto, é necessário alterar os parâmetros relacionados às dimensões do sinal de transmissão do GFDM. Considerando $N = KM$, (2.1) pode ser reescrita como

$$g_{k,m}[n] = g[\langle n - mK \rangle_N] \exp\left(j2\pi \frac{kM}{N} n\right). \tag{3.2}$$

Uma vez que o filtro protótipo de $\bar{N}$ amostras pode ser dividido em $\bar{P}$ períodos com $\bar{S}$ amostras cada [27], e que a separação entre os subsímbolos no tempo é dada por $\bar{K}$ amostras e a separação entre as subportadoras em frequência é dada por $\bar{M}$ amostras, o vetor GFDM de transmissão pode ser representado por

$$x[n] = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} d_{k,m} g[\left\langle n - m\bar{K} \right\rangle_{\bar{N}}] \exp\left(j2\pi \frac{k\bar{M}}{\bar{N}} n\right), \tag{3.3}$$

com $n = 0, \cdots, \bar{N}-1$. Para que o sinal em (3.3) apresente alta eficiência espectral, é necessário que $\bar{K} < \bar{S}$ e/ou $\bar{M} < \bar{P}$. Portanto, os fatores de compressão no domínio do tempo e da frequência são respectivamente dados por

$$v_t = \frac{\bar{K}}{\bar{S}}, \tag{3.4}$$

e

$$v_f = \frac{\bar{M}}{\bar{P}}. \tag{3.5}$$

A partir de (3.4) e (3.5), os novos valores de $K$ e $M$ podem ser calculados através de

$$K = \left\lfloor \frac{\bar{P}\bar{S}}{\bar{M}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\bar{S}}{v_f} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\bar{N}}{\bar{M}} \right\rfloor \tag{3.6}$$

e

$$M = \left\lfloor \frac{\bar{P}\bar{S}}{\bar{K}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\bar{P}}{v_t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\bar{N}}{\bar{K}} \right\rfloor, \tag{3.7}$$

onde o operador $\lfloor . \rfloor$ arredonda para o maior inteiro menor ou igual ao argumento. Substituindo $v_t$ e $v_f$ em (3.3), o sinal FTN-GFDM é, portanto, dado por

$$x[n] = \sqrt{v_t v_f} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} d_{k,m} g[\left\langle n - m v_t \bar{S} \right\rangle_{\bar{N}}] \exp\left( j2\pi \frac{k v_f}{\bar{S}} n \right), \tag{3.8}$$

onde $\sqrt{v_t v_f}$ mantém a potência de transmissão constante e $n = 0, \cdots, \bar{N}-1$. A Figura 3.1 mostra o diagrama de blocos do transmissor FTN-GFDM.

Quando os fatores de compressão no tempo, $v_t$, e frequência, $v_f$, são menores que 1, o sinal viola o critério de Nyquist e a densidade de símbolo de dados por amostra do sinal GFDM, $\frac{N}{\bar{N}}$, torna-se maior do que 1, aumentando a eficiência espectral do sistema. Quando $v_t = 1$ e $v_f = 1$, o critério de Nyquist é respeitado e o sistema equivale ao GFDM convencional, com densidade igual a 1.

A escolha correta dos parâmetros FTN-GFDM é importante, porque algumas vezes a densidade máxima de símbolos de dados por amostra não será alcançada. Consequentemente, se o valor da razão $\frac{\bar{N}}{\bar{M}}$ ou $\frac{\bar{N}}{\bar{K}}$ em (3.6) e (3.7) não for um inteiro, haverá uma perda no valor da densidade de dados. Em outras palavras, o bloco não carregará a quantidade máxima de símbolos de dados por amostra para o fator de compressão escolhido. A escolha dos parâmetros $\bar{S}$, $\bar{P}$, $\bar{K}$ e $\bar{M}$ deve ser feita considerando o arredondamento e a perda na densidade. Os valores $v_t$ e $v_f$ precisam ser corrigidos para a adequada normalização, levando a

$$\bar{v}_t = \frac{\bar{P}}{M}, \tag{3.9}$$

e

$$\bar{v}_f = \frac{\bar{S}}{K}, \tag{3.10}$$

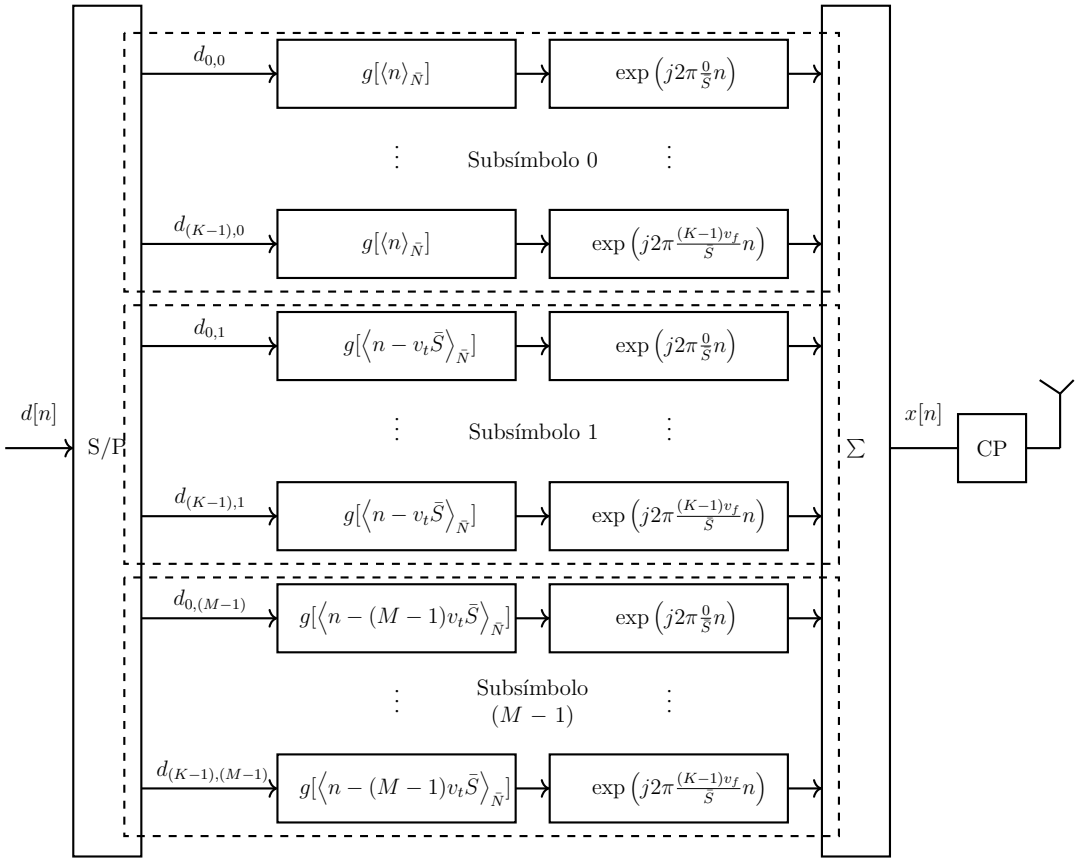



Figura 3.1 – *Diagrama de transmissão FTN-GFDM.*

onde $\bar{v}_t$ e $\bar{v}_f$ são os valores corrigidos de $v_t$ e $v_f$, respectivamente.

Finalmente, o sinal FTN-GFDM é definido como

$$\bar{x}[n] = \sqrt{\bar{v}_t\bar{v}_f}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{m=0}^{M-1} d_{k,m}g[\left\langle n - mv_t\bar{S}\right\rangle_{\bar{N}}]\exp\left(j2\pi\frac{kv_f}{\bar{S}}n\right), \tag{3.11}$$

com $n = 0, \cdots, \bar{N} - 1$.

A Figura 3.2 mostra o valor absoluto das matrizes de transmissão GFDM e FTN-GFDM. Os filtros protótipos utilizados são o Dirichlet [28] e o RRC com 50 amostras, divididas em 5 períodos com 10 amostras cada um, e deslocadas circularmente no tempo e frequência. Na Figura 3.2a, 50 símbolos de dados são transmitidos por 5 subsímbolos, cada um com 10 subportadoras. Portanto, a densidade de símbolos de dados por amostra GFDM é igual a $50/50 = 1$. Já na Figura 3.2b, 60 símbolos de dados são transmitidos em 6 subsímbolos com 10 subportadoras cada um. Desta forma, a densidade de símbolos de dados por amostra do sinal FTN-GFDM é $60/50 = 1,2$. Além disto, como os fatores de compressão da Figura 3.2b são $v_t = 0,8$ e $v_f = 1$, os subsímbolos se sobrepõem no domínio tempo. Na Figura 3.2c, o sinal FTN-GFDM sofre com a compressão na

frequência e, portanto, as subportadoras se sobrepõem. Como a figura mostra o valor absoluto da matriz, não é possível ver esta sobreposição, porém o número de subportadoras por subsímbolo aumenta. Nesta figura, 60 símbolos são transmitidos por 5 subsímbolos com 12 subportadoras cada um. Comparando a matriz do GFDM convencional da Figura 3.2a com as matrizes FTN-GFDM das Figuras 3.2b e 3.2c, há um aumento de 20% na quantidade de símbolos de dados transmitidos, melhorando a eficiência espectral do sistema.

A eficiência espectral é um parâmetro importante na avaliação do desempenho de um sistema e representa a eficiência com que este utiliza a largura de banda de um canal. A eficiência espectral é a razão entre a vazão e a largura de banda do sinal e é medida em bits por segundo por hertz. Considerando o FTN-GFDM com constelação $J$-ária, a vazão e a largura de banda ocupada são respectivamente dadas por

$$R_b = \frac{R_c MK}{(\bar{P}\bar{S} + N_{\mathrm{CP}})T_s} \tag{3.12}$$

e

$$B_w = \frac{1}{\log_2(J)T_s}, \tag{3.13}$$

onde $R_b$ é a taxa de bits dada em bits por segundo, $B_w$ é a largura de banda ocupada em hertz, $T_s$ é o período de amostragem em segundos, $R_c$ é a taxa de codificação do canal e $N_{\mathrm{CP}}$ é o número de amostras do CP. Desta forma, a eficiência espectral é representada por

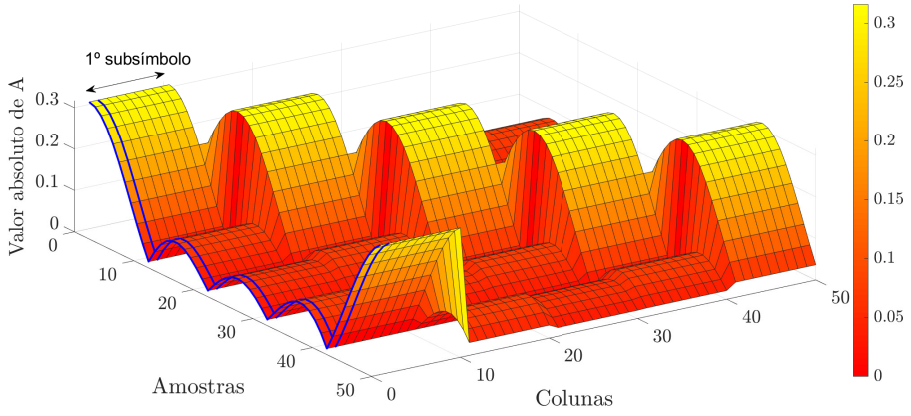
$$\eta = \frac{R_c MK \log_2(J)}{\bar{P}\bar{S} + N_{\mathrm{CP}}}. \tag{3.14}$$

Considerando o sinal FTN-GFDM em (3.11), o vetor recebido é dado por

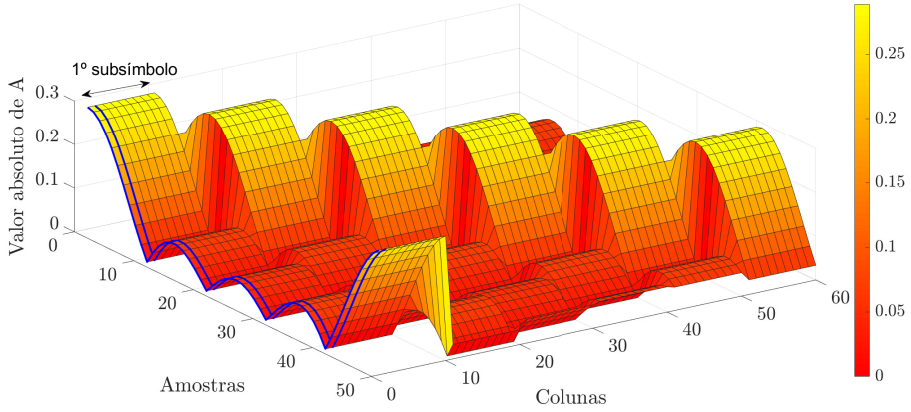
$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{w}. \tag{3.15}$$

A Figura 3.3 ilustra o diagrama em blocos do transceptor FTN-GFDM. Deste modo, o modulador FTN-GFDM apresentado na Figura 3.1, é integrado aos blocos do canal, do equalizador, do demodulador e do detector para tornar o diagrama representativo de um sistema FTN-GFDM completo.

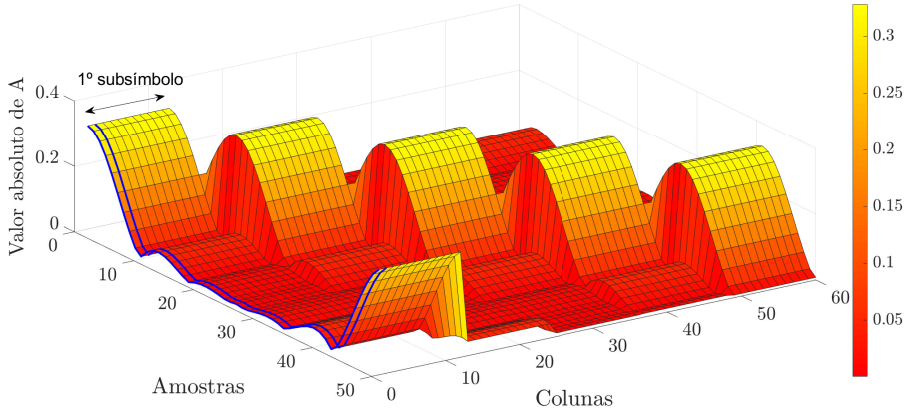
No lado do receptor, a interferência criada pela sobreposição dos subsímbolos e subportadoras permanece um desafio. A questão chave no sistema FTN-GFDM é como estimar o sinal transmitido com baixa complexidade. Para isso, o receptor é composto por dois estágios principais: demodulação e detecção. No primeiro estágio, o MF é responsável por fazer a correlação da matriz Hermitiana da matriz de transmissão com as amostras equalizadas do sinal recebido, de




(a) Matriz de transmissão GFDM para o pulso Dirichlet




(b) Matriz de transmissão FTN-GFDM para o pulso Dirichlet




(c) Matriz de transmissão FTN-GFDM para o pulso RRC ($\beta = 0,5$)

Figura 3.2 – *Comparação entre as matrizes de transmissão GFDM e FTN-GFDM, para pulsos Dirichlet e RRC ($\beta = 0,5$) com $\bar{P} = 5$ períodos e $\bar{S} = 10$ amostras por período.*

modo que o sinal discreto na saída do MF é expresso como

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{d} + \bar{\mathbf{w}}, \tag{3.16}$$

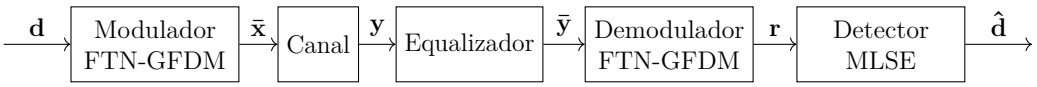


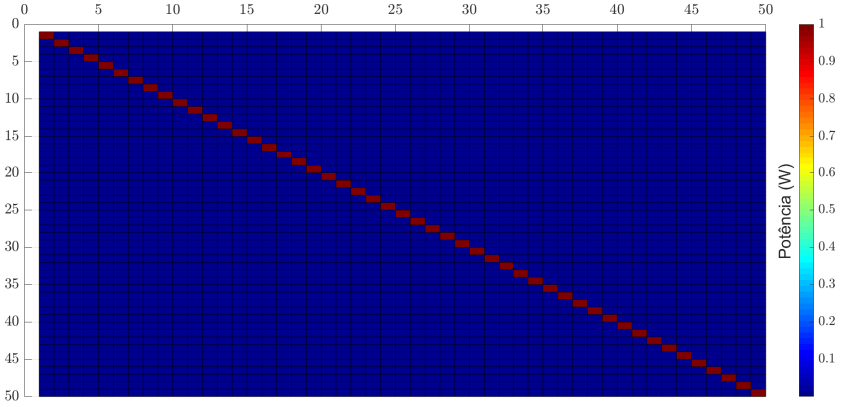

Figura 3.3 – *Diagrama em blocos do transceptor FTN-GFDM.*

onde $\mathbf{G}$ é a matriz de interferências para $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ e representa ISI e a ICI do sinal FTN-GFDM. O vetor de ruído $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{w}$ possui amostras correlacionadas devido à não-ortogonalidade da matriz MF. O MF é usado para maximizar a SNR e extrair informações suficientes para que o próximo estágio possa detectar os símbolos de dados com uma BER aceitável.

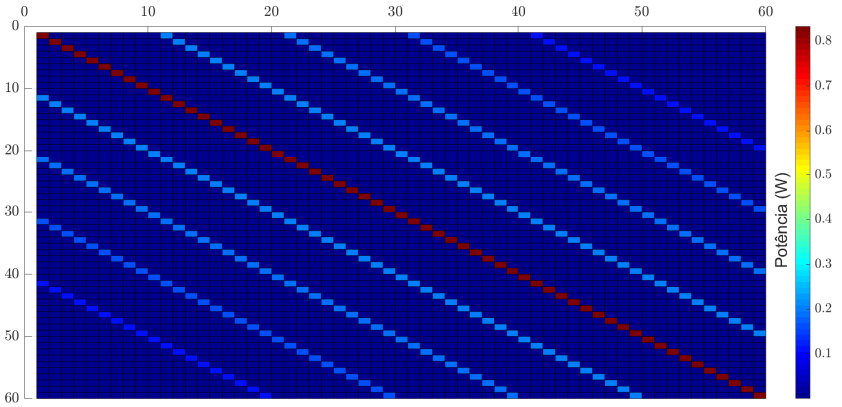
A Figura 3.4 apresenta as matrizes de interferências $\mathbf{G}$ para os esquemas GFDM e FTN-GFDM. Foram utilizados filtro protótipo Dirichlet e RRC com 50 amostras, divididas em 5 períodos com 10 amostras cada. Para os esquemas FTN-GFDM, foram considerados fatores de compressão iguais à $v_t = 0,8$ e $v_f = 1$ na Figura 3.4b e $v_t = 1$ e $v_f = 0.8$ na Figura 3.4c.

Como o esquema GFDM da Figura 3.4a é ortogonal, não há ISI ou ICI e, portanto, $\mathbf{G}$ é uma matriz diagonal. Já na Figura 3.4b devido a ISI, a matriz $\mathbf{G}$ possui uma diagonal principal que representa a posição dos dados desejados e valores não nulos fora da diagonal principal, que são a ISI. e outros valores representam interferência. Por fim, a ICI na Figura 3.4c é causada pela compressão do sinal na frequência e pelo decaimento da resposta em frequência do pulso RRC. Neste caso, como o pulso RRC atende ao critério de Nyquist e a compressão é no domínio da frequência, não há ISI. Na diagonal principal estão posicionados os dados desejados e os outros valores não nulos representam, portanto, a ICI. Como a ISI e a ICI dependem das características do pulso do protótipo, dos valores de $v_t$ e $v_f$ e do número de subsímbolos e subportadoras, o desempenho do esquema FTN-GFDM está relacionado ao condicionamento da matriz $\mathbf{G}$.

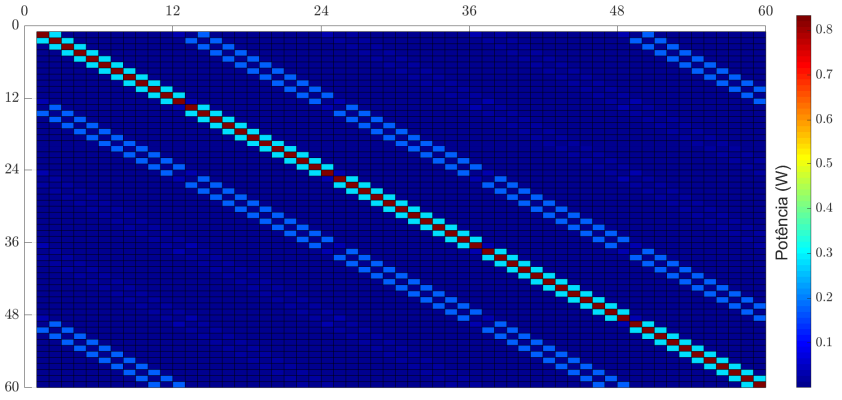
Uma matriz é dita mal condicionada quando suas linhas ou colunas são correlacionadas e, consequentemente, seu determinante é proximo de zero. Desta forma, o determinante de uma matriz pode ser um indicador do condicionamento de uma matriz. Quanto maior a correlação entre as linhas ou colunas de uma matriz, pior é seu condicionamento e, portanto, mais próximo de zero é seu determinante. Uma matriz diagonal, como a da Figura 3.4a, possui determinante igual a 1. Como a matriz ortonormal $\mathbf{G}$ do FTN-GFDM não é mais diagonal, o determinante será menor que 1. Uma matriz é dita singular quando suas linhas ou colunas são iguais, de modo que seu determinante é igual a zero. Neste caso, a matriz não possui inversa [38].




(a) Matriz de interferência GFDM para o pulso Dirichlet




(b) Matriz de interferência FTN-GFDM para o pulso Dirichlet




(c) Matriz de interferência FTN-GFDM para o pulso RRC ($\beta = 0,5$)

Figura 3.4 – *Comparação entre as matrizes de coeficientes de correlação GFDM e FTN-GFDM, para pulsos Dirichlet e RRC ($\beta = 0,5$) com $\bar{P} = 5$ períodos e $\bar{S} = 10$ amostras por período.*

O mal condicionamento de uma matriz implica na sensibilidade do sistema à pequenas perturbações e na impossibilidade da inversão da matriz, o que afeta a aplicabilidade de detectores lineares como ZF em sistemas FTN-GFDM.

No segundo estágio, o detector ótimo deve acomodar as características do condicionamento da matriz $\mathbf{G}$. Uma opção consiste em empregar o detector MLSE para recuperar os símbolos de dados transmitidos originalmente e minimizar a probabilidade de erro. O detector MLSE pode efetivamente lidar com a interferência e reduzir a BER. Ainda sim, requer a busca exaustiva de todas as combinações possíveis de símbolos transmitidos. O MLSE decide pela combinação de símbolos $\hat{\mathbf{d}}$ que minimiza a distância Euclidiana em relação ao vetor $\mathbf{r}$, de modo que

$$\arg \min_{\hat{\mathbf{d}} \in \xi^N} \left\| \mathbf{r} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{d}} \right\|^2, \tag{3.17}$$

onde $\xi^N$ é o conjunto de todas as $J^N$ combinações possíveis de símbolos. Portanto, a complexidade do MLSE aumenta significativamente com $N$ e a densidade da constelação e não pode ser empregado na prática. Embora este detector possa ser usado como prova de conceito, uma solução viável para implementação prática precisa ser encontrada.

A Tabela 3.1 sintetiza e relaciona os parâmetros do esquema FTN-GFDM [27]. Pode-se notar que o SEFDM é um caso específico do FTN-GFDM. Neste caso, o filtro protótipo deve ser retangular e $M = 1$, uma vez que o bloco SEFDM consiste em um único subsímbolo e $K$ subportadoras.

## 3.1 Conclusões

O GFDM demonstrou ser uma forma de onda flexível que pode ser ajustada para englobar as formas de onda FTN e SEFDM. Isto é possível diminuindo o espaçamento entre os subsímbolos e entre as subportadoras, de modo que a densidade de símbolos de dados por amostra do sinal se torne maior que 1.

A configuração FTN-GFDM une as principais vantagens do FTN e do SEFDM ao GFDM, como maior eficiência espectral em função do melhor uso do CP e também da compressão no tempo e na frequência e flexibilidade para atender os requisitos das redes 5G. Como não há ortogonalidade entre os subsímbolos e subportadoras, maior grau de liberdade pode ser fornecido para a camada física. Porém o FTN-GFDM requer maior complexidade de recepção para mitigar o problema causado pela ISI e ICI.

Tabela 3.1 – *Relação entre os parâmetros FTN-GFDM.*

| Variável | Definição |
|---|---|
| $\bar{P}$ | Períodos do filtro protótipo |
| $\bar{S}$ | Amostras por período do filtro protótipo |
| $\bar{N} = \bar{P}\bar{S}$ | Total de amostras no sinal |
| $\bar{K}$ | Espaçamento dos subsímbolos no tempo |
| $\bar{M}$ | Espaçamento das subportadoras na frequência |
| $v_t = \bar{K}/\bar{S}$ | Fator de compressão no tempo |
| $v_f = \bar{M}/\bar{P}$ | Fator de compressão na frequência |
| $K = \lfloor \bar{P}\bar{S}/\bar{M} \rfloor = \lfloor \bar{S}/v_f \rfloor = \lfloor \bar{N}/\bar{M} \rfloor$ | Subportadoras por bloco |
| $M = \lfloor \bar{P}\bar{S}/\bar{K} \rfloor = \lfloor \bar{P}/v_t \rfloor = \lfloor \bar{N}/\bar{K} \rfloor$ | Subsímbolos por bloco |
| $N = KM$ | Símbolos de dados por bloco |
| $\bar{v_t} = \bar{S}/K$ | Fator de compressão corrigido no tempo |
| $\bar{v_f} = \bar{P}/M$ | Fator de compressão corrigido na frequência |

Pode-se concluir que um aumento significativo de eficiência espectral pode ser obtido quando o FTN é combinado com o GFDM, podendo ser uma solução adequada para a evolução do cenário eMBB, nos casos de radiodifusão de vídeo sobre 5G, e para áreas remotas, onde MIMO massivo e pequenas células não podem ser empregados.

# Capítulo 4

# Sphere Decoder para o esquema FTN-GFDM

## 4.1 Algoritmo Sphere Decoder

Como o ML encontra a solução ótima através da busca entre todas as possíveis sequências candidatas, não pode ser empregado em sistemas práticos. O algoritmo SD, originalmente proposto por U. Fincke e M. Pohst em 1985 [19], é um método eficiente para resolver o problema expresso em (3.17). O SD simplifica o esforço computacional e se aproxima do desempenho ótimo. No entanto, a complexidade do SD não é constante, e depende do SNR e do condicionamento da matriz do sistema.

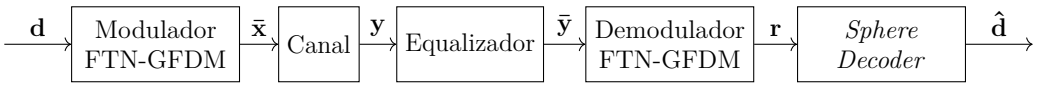



Figura 4.1 – *Diagrama em blocos do transceptor FTN-GFDM.*

O diagrama em blocos do transceptor FTN-GFDM da Figura 4.1 integra o modulador FTN-GFDM apresentado na Figura 3.1, a um receptor FTN-GFDM baseado no detector SD. O princípio do algoritmo SD consiste em limitar o espaço de busca em uma esfera multidimensional, procurando apenas por soluções que estejam dentro do raio $\rho$ ao redor do vetor recebido $\mathbf{r}$ . Como o candidato mais próximo dentro da esfera também será o candidato mais próximo de todo o espaço amostral, o SD pode atingir o mesmo resultado que o ML, porém de forma menos custosa [39]. Para uma solução estar dentro da esfera é necessário que

$$\rho^2 \geq \|\mathbf{r} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{d}}\|^2. \tag{4.1}$$

Como o raio da esfera é um parâmetro crucial para o algoritmo SD, seu dimensionamento deve ser feito com cautela. Se $\rho$ é muito grande, haverá muitos candidatos dentro da esfera e a complexidade de busca permanecerá muito alta. Consequentemente, é importante escolher um $\rho$ menor, a fim de reduzir a complexidade. Porém, se $\rho$ for muito pequeno, não haverá candidatos dentro da esfera de busca e, então, nenhuma solução poderá ser encontrada [39][40].

O raio inicial pode ser definido pela distância entre a saída do MF, $\mathbf{r}$, e uma estimativa inicial. Isso garante que pelo menos a estimativa inicial do vetor $\mathbf{d}$ esteja contida na esfera. Uma possível estimativa inicial pode ser obtida aplicando o ZF. Assim $\rho$ é calculado através de

$$\rho^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{d}}_{\mathrm{ZF}}\|^2, \tag{4.2}$$

onde $\hat{\mathbf{d}}_{\mathrm{ZF}}$ é a estimativa inicial do vetor $\mathbf{d}$ baseada no ZF. A Figura 4.2 mostra um exemplo da busca do algoritmo SD. A esfera é centralizada em $\mathbf{r}$ e possui raio $\rho$, calculado através da distância Euclidiana entre o vetor $\mathbf{r}$ e a estimativa $\hat{\mathbf{d}}_{\mathrm{ZF}}$. Há cinco possíveis candidatos dentro da esfera e um deles é a estimativa $\hat{\mathbf{d}}_{\mathrm{ZF}}$. Portanto, o espaço amostral de busca é reduzido e apenas os cinco candidatos contidos na esfera são analisados. Neste caso, $\hat{\mathbf{d}}$ é o canditado com menor distância Euclidiana em relação a $\mathbf{r}$ e, consequentemente, representa a solução. É importante notar, que $\hat{\mathbf{d}}$ é também o candidato mais próximo em todo o espaço amostral. Portanto, neste caso, o SD decide pela mesma solução que seria escolhida pelo ML.

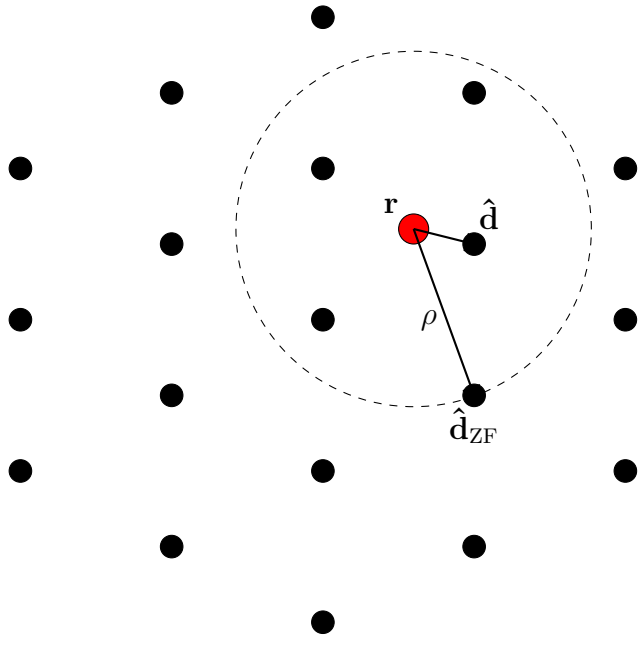



Figura 4.2 – Algoritmo sphere decoder considerando o vetor recebido $\mathbf{r}$ e raio $\rho$.

Para simplificar o cálculo da norma euclidiana em (4.1), é comum considerar a fatoração QR da matriz $\mathbf{G}$, de tal modo que

$$\mathbf{G} = \mathbf{QR}, \tag{4.3}$$

onde $\mathbf{R}$ é uma matriz triangular superior e $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortonormal. Portanto, aplicando a fatoração QR em (4.1), tem-se

$$\rho^2 \geq \|\mathbf{r} - \mathbf{QR}\hat{\mathbf{d}}\|^2. \tag{4.4}$$

Então, multiplicando (4.4) pela matriz transposta da matriz $\mathbf{Q}$, de modo que

$$\rho^2 \geq \|\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{r} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{d}}\|^2, \tag{4.5}$$

tem-se que

$$\rho^2 \geq \|\mathbf{z} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{d}}\|^2, \tag{4.6}$$

onde $\mathbf{z} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}$. Devido $\mathbf{R}$ ser uma matriz triangular superior, (4.6) pode ser reescrita como

$$\rho^2 \geq \sum_{i=1}^{N} \left( z_i - \sum_{j=i}^{N} R_{i,j} d_j \right)^2. \tag{4.7}$$

Desenvolvendo o somatório da desigualdade em (4.7), tem-se

$$\begin{aligned} \rho^2 \geq {} & \left(z_N - R_{N,N} d_N\right)^2 + \\ & \left(z_{N-1} - R_{N-1,N-1} d_{N-1} - R_{N-1,N} d_N\right)^2 + \\ & \left(z_{N-2} - R_{N-2,N-2} d_{N-2} - R_{N-2,N-1} d_{N-1} - R_{N-2,N} d_N\right)^2 \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{4.8}$$

Observe que o primeiro elemento da desigualdade acima depende apenas de $d_N$, o segundo depende de $\{d_N, d_{N-1}\}$ e assim por diante. Consequentemente, a busca na esfera multidimensional pode ser dividida na busca em intervalos linares consecutivos. Isto é possível se cada um dos termos quadrados em (4.8) forem examinados separadamente [38]. Portanto, considerando (4.8), a desigualdade para o $N$-ésimo termo é dada por

$$\rho^2 \geq \left(z_N - R_{N,N} d_N\right)^2. \tag{4.9}$$

Isso é equivalente ao $N$-ésimo símbolo de dados pertencer ao intervalo

$$\left\lceil \frac{z_N - \rho}{R_{N,N}} \right\rceil \leq d_N \leq \left\lfloor \frac{z_N + \rho}{R_{N,N}} \right\rfloor, \tag{4.10}$$

onde o operador $\lceil . \rceil$ arredonda para o menor inteiro maior ou igual ao argumento. Certamente, (4.10) não garante que todos os símbolos no vetor $\hat{\mathbf{d}}$ estejam dentro

do raio da esfera $\rho$. Portanto, o valor de $\rho$ e os intervalos de busca devem ser atualizados para o $(N-1)$-ésimo termo. Considere que $\rho$ é atualizado por

$$\rho_{i-1}^2 = \rho_i^2 - \left( z_i - \sum_{j=i}^{N} R_{i,j} d_j \right)^2 . \tag{4.11}$$

Então $\rho_{N-1}$ será dado por

$$\rho_{N-1}^2 = \rho^2 - \left( z_N - R_{N,N} d_N \right)^2 . \tag{4.12}$$

E o novo intervalo de pesquisa é descrito por

$$d_{N-1} \geq \left\lceil \frac{z_{N-1} - R_{N-1,N} d_N - \rho_{N-1}}{R_{N-1,N-1}} \right\rceil , \tag{4.13}$$

$$d_{N-1} \leq \left\lfloor \frac{z_{N-1} - R_{N-1,N} d_N + \rho_{N-1}}{R_{N-1,N-1}} \right\rfloor . \tag{4.14}$$

O mesmo processo continua até que todos os símbolos no vetor $\mathbf{d}$ sejam encontrados dentro da esfera. O algoritmo SD começa pela busca do $N$-ésimo termo e desce até o primeiro termo. Genericamente, o intervalo linear de busca para o $i$-ésimo termo será dado por

$$d_i \geq \left\lceil \frac{\left( z_i - \sum_{j=i+1}^{N} R_{i,j} d_j \right) - \rho_i}{R_{i,i}} \right\rceil , \tag{4.15}$$

$$d_i \leq \left\lfloor \frac{\left( z_i - \sum_{j=i+1}^{N} R_{i,j} d_j \right) + \rho_i}{R_{i,i}} \right\rfloor . \tag{4.16}$$

É possível que, em determinado nível, nenhum símbolo se encaixe ao intervalo definido por (4.15) e (4.16). Nesse caso, não é possível ir mais longe. Em vez disso, é preciso voltar ao nível superior e escolher outro símbolo candidato que se ajuste ao intervalo do nível superior e, em seguida, atualizar o intervalo do nível inferior e assim por diante [41]. Quando o primeiro nível é alcançado e a distância Euclidiana encontrada é menor do que a distância inicial, o valor de $\rho_N$ deve ser atualizado com o valor da nova distância e o processo é reiniciado.

## 4.2 Algoritmo SD proposto para o esquema FTN-GFDM

As estatísticas coletadas pelo MF no esquema FTN-GFDM apresentam propriedades diferentes quando comparadas ao GFDM convencional. Como o MF é construído a partir da matriz de transmissão, as características do ruído

são afetas pela não ortogonalidade da matriz $\mathbf{A}$. Em particular, nos sistemas FTN-GFDM as amostras de ruído na saída do MF são correlacionadas por $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ e possuem matriz de covariância igual a $\sigma^2\mathbf{G}$.

Devido às amostras de ruído não serem mais brancas, o detector deve acomodar as características do ruído. Como o algoritmo SD original leva em consideração que a matriz de transmissão $\mathbf{A}$ é ortogonal, ele não pode ser usado sem adaptação. Para isto, um de filtro de branquemamento deve ser inserido para mitigar os efeitos do MF nas amostras de ruído. Algumas considerações importantes sobre o filtro de branqueamento na detecção ML devem ser feitas.

Como mostrado anteriormente, o MLSE é o detector ideal e estima os símbolos aplicando o critério máximo a posteriori (*maximum a posteriori*, MAP) [38][42]. Assim, a probabilidade 'a posteriori' pode ser expressa como

$$p(\mathbf{d}|\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r}|\mathbf{d})p(\mathbf{d})}{p(\mathbf{r})}, \tag{4.17}$$

onde $\mathbf{d}$ é o vetor de símbolos de dados e $\mathbf{r}$ é o vetor na saída do MF. Considerando que os símbolos são independentes e identicamente distribuídos (*independent and identically distributed*, IID), a probabilidade 'a priori' $p(\mathbf{d})$ é $\frac{1}{J^N}$, onde $J$ é ordem de modulação. Portanto, para maximizar $p(\mathbf{d}|\mathbf{r})$ é necessário maximizar a função de verossimilhança $p(\mathbf{r}|\mathbf{d})$ [38] [42]. Considerando que $p(\mathbf{r}|\mathbf{d})$ é dado por

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{d}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|\det(\sum N)|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{d}})^{\mathrm{H}}(\sigma^2\mathbf{G})^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{d}})}, \tag{4.18}$$

o expoente deve minimizado para maximizar a função de verossimilhança (4.18). Sendo

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{d}})^{\mathrm{H}}(\sigma^2\mathbf{G})^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{d}}) \\ = \frac{1}{\sigma^2}(\mathbf{r}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{d}})^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{d}}) \\ = \frac{1}{\sigma^2}||(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{d}})||^2,\end{aligned} \tag{4.19}$$

fica claro que o detector ótimo deve minimizar a norma Euclidiana entre o vetor $\mathbf{r}$ e a sequência de símbolos $\hat{\mathbf{d}}$ ponderada pela matriz $\mathbf{G}$. Portanto, a estimativa SD para o esquema FTN-GFDM com o filtro de branqueamento é dada por

$$\arg\min_{\hat{\mathbf{d}}\in\xi^N} \left\|(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{d}})\right\|^2 \leq \rho^2, \tag{4.20}$$

onde o termo $(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{-1}$ representa o filtro de branqueamento. Considerando que a estimativa sem restrições ML, $\bar{\mathbf{z}} = (\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{r}$, é definida como a pseudo-inversa

Moore-Penrose de $\mathbf{r}$, (4.20) pode ser reescrita da seguinte forma

$$(\bar{\mathbf{z}}-\mathbf{d})^{\mathrm{H}}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{H}}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{z}}-\mathbf{d}) = (\bar{\mathbf{z}}-\mathbf{d})^{\mathrm{H}}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}(\bar{\mathbf{z}}-\mathbf{d}) \leq \rho^2. \quad (4.21)$$

A fim de simplificar o cálculo da norma Euclidiana ao quadrado, a matriz $\mathbf{G}^{\mathrm{H}}$ pode ser decomposta em matrizes triangulares empregando a decomposição de Cholesky [43]. Logo, a matriz $\mathbf{G}^{\mathrm{H}}$ pode ser representada por duas matrizes triangulares dadas por

$$\mathrm{chol}\{\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\} = \mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L}, \quad (4.22)$$

onde $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular superior. Então, (4.20) pode ser reescrita como

$$\arg\min_{\hat{\mathbf{d}}\in\xi^N} \left\|\mathbf{L}(\bar{\mathbf{z}}-\hat{\mathbf{d}})\right\|^2 \leq \rho^2. \quad (4.23)$$

Pelo fato de $\mathbf{L}$ ser uma matriz triangular, a norma Euclidiana em (4.23) pode ser expandida em

$$\rho^2 \geq (L_{N,N}(\bar{z}_N - d_N))^2 + + (L_{N-1,N-1}(\bar{z}_{N-1} - d_{N-1}) + L_{N-1,N}(\bar{z}_N - d_N))^2 + + \dots. \quad (4.24)$$

A estrutura de (4.24) permite que cada elemento ao quadrado seja examinado separadamente. Considerando o primeiro elemento depende apenas de $d_N$, a condição necessária para que o $N$-ésimo símbolo de dados esteja dentro da esfera é

$$\rho^2 \geq (L_{N,N}(\bar{z}_N - d_N))^2. \quad (4.25)$$

Isto é equivalente a examinar os possíveis valores de $d_N$, que satisfazem o seguinte intervalo

$$\left\lceil \bar{z}_N - \frac{\rho}{L_{N,N}} \right\rceil \leq d_N \leq \left\lfloor \bar{z}_N + \frac{\rho}{L_{N,N}} \right\rfloor. \quad (4.26)$$

Como o algoritmo SD é iterativo, a cada $d_N$ que satisfaz (4.26), o valor do raio para o $N-1$ nível é atualizado através de

$$\rho_{N-1}^2 = \rho^2 - (L_{N,N}(\bar{z}_N - d_N))^2, \quad (4.27)$$

e a nova condição de busca deve ser calculada através de

$$\rho_{N-1}^2 \geq (L_{N-1,N-1}(\bar{z}_{N-1} - d_{N-1}) + L_{N-1,N}(\bar{z}_N - d_N))^2. \quad (4.28)$$

Da mesma forma, os novos intervalos de busca para o $(N-1)$-ésimo nível são determinados por

$$d_{N-1} \geq \left\lceil \bar{z}_{N-1} - \frac{\rho_{N-1} - L_{N-1,N}(\bar{z}_N - d_N)}{L_{N-1,N-1}} \right\rceil, \tag{4.29}$$

$$d_{N-1} \leq \left\lfloor \bar{z}_{N-1} + \frac{\rho_{N-1} + L_{N-1,N}(\bar{z}_N - d_N)}{L_{N-1,N-1}} \right\rfloor. \tag{4.30}$$

Portanto, o raio para o $(i-1)$-ésimo nivel é genericamente dado por

$$\rho_{i-1}^2 = \rho_i^2 - \left( \sum_{j=i}^{N} L_{i,j}(\zeta_j - d_j) \right)^2, \tag{4.31}$$

e os intervalos de busca para o $i$-ésimo nível são expressos por

$$d_i \geq \left\lceil \bar{z}_i - \left( \frac{\rho_i + \sum_{j=i+1}^{N} L_{i,j}(\bar{z}_j - d_j)}{L_{i,i}} \right) \right\rceil, \tag{4.32}$$

$$d_i \leq \left\lfloor \bar{z}_i + \left( \frac{\rho_i + \sum_{j=i+1}^{N} L_{i,j}(\bar{z}_j - d_j)}{L_{i,i}} \right) \right\rfloor. \tag{4.33}$$

É importante notar que (4.31), (4.32) e (4.33) são para sinais reais. No caso de sinais complexos, as partes real e a imaginária devem ser analisadas seperadamente. Para que as equações do SD propostas possam ser empregadas em sinais complexos, as variáveis $\mathbf{G}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{r}$ e $\bar{\mathbf{z}}$ devem ser expandidas através da decomposição real [38] da seguinte maneira

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{G}\} & \Im\mathfrak{m}\{\mathbf{G}\} \\ -\Im\mathfrak{m}\{\mathbf{G}\} & \Re\{\mathbf{G}\} \end{bmatrix}, \tag{4.34}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{A}\} & \Im\mathfrak{m}\{\mathbf{A}\} \\ -\Im\mathfrak{m}\{\mathbf{A}\} & \Re\{\mathbf{A}\} \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

$$\mathbf{d}' = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{d}\} \\ \Im\mathfrak{m}\{\mathbf{d}\} \end{bmatrix}, \tag{4.36}$$

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{r}\} \\ \Im\mathfrak{m}\{\mathbf{r}\} \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

$$\bar{\mathbf{z}}' = \begin{bmatrix} \Re\{\bar{\mathbf{z}}\} \\ \Im\mathfrak{m}\{\bar{\mathbf{z}}\} \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

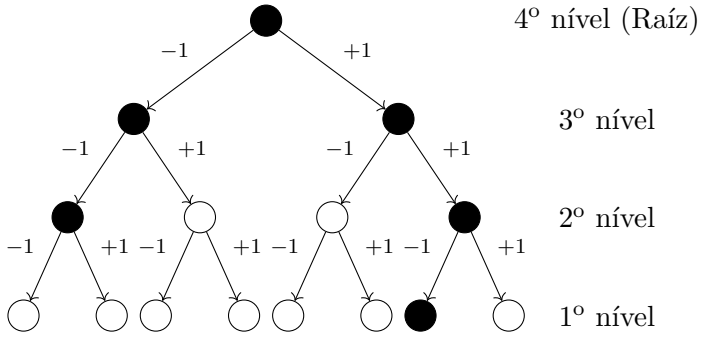



Figura 4.3 – Árvore de busca do algoritmo SD.

Portanto, a decomposição real permite que as expressões sejam empregadas corretamente e simplificam a solução em casos de sinais complexos.

O processo de busca é semelhante ao do SD original. O algoritmo pode ser visto como uma árvore de busca, com profundidade de $N + 1$ níveis, onde cada nó tem um número de ramificações igual à ordem de modulação do sistema. Portanto, o tamanho total da árvore, ou seja, o número de nós de pesquisa, é igual a $J^N + 1$. A transição de um nó do nível $i + 1$ para um nó do nível abaixo, $i$, determina a decisão do $i$-ésimo símbolo de dados. Se um nó em um determinado nível for descartado, consequentemente, todos os seus nós abaixo também serão descartados. Toda vez que um nó no primeiro nível é encontrado, um ponto será encontrado dentro da esfera. Então, os valores do raio de busca inicial e intervalos devem ser atualizados. A Figura 4.3 mostra uma árvore de busca para o algoritmo SD para $N = 3$ símbolos e modulação por deslocamento de fase binária (*Binary Phase Shift Keying*, BPSK). O número de candidatos dentro da esfera depende da estimativa inicial. Quanto melhor esta estimativa, menos candidatos haverá dentro da esfera. Na árvore apresentada na Figura 4.3 existe apenas um candidato dentro da esfera, pois há uma única opção possível de símbolo no primeiro nível.

A complexidade do SD depende do raio de busca inicial e, consequentemente, da estimativa inicial. Além disso, como a estimativa inicial é baseada no ZF, a complexidade e o desempenho do sistema dependerão da SNR e do condicionamento da matriz de transmissão. Do ponto de vista da árvore de busca, a complexidade também depende da ordem de modulação e de $N$. Portanto, no pior cenário, o SD terá complexidade de ML.

## 4.3 Conclusões

O FTN-GFDM é um esquema promissor que tem o potencial de melhorar a eficiência espectral se os mecanismos apropriados forem aplicados na recepção para lidar com a ISI e ICI. No entanto, a alta complexidade de esquemas convencionais, como o ML, torna esta solução impraticável. Logo, foram propostas mudanças no algoritmo Sphere Decoder original para que possa ser aplicado na recepção do sinal FTN-GFDM e a decomposição de Cholesky foi usada para diminuir a dimensão do problema.

Conclui-se que o uso do SD combinado com a decomposição de Cholesky é uma abordagem interessante para alcançar os ganhos de eficiência do FTN-GFDM com uma complexidade que pode ser suportada pelas atuais implementações de sistemas de comunicações móveis.

# Capítulo 5

# Avaliação de Desempenho

Neste capítulo, o desempenho do sinal FTN-GFDM foi avaliado através de simulações numéricas usando o MATLAB®. Para medir o desempenho em termos de BER, foram considerados três modelos de canal: AWGN, seletivo em frequência invariante no tempo (*frequency-selective channel*, FSC) e variante no tempo (*time-variant channel*, TVC) com um único tap *Rayleigh* que muda a cada bloco FTN-GFDM. A Tabela 5.1 apresenta os parametros dos canais. As simulações consideram que o canal é conhecido no lado do receptor e que o sincronismo é perfeito.

Tabela 5.1 – *Modelos de Canais*

| Canal | Resposta ao Impulso |
|---|---|
| Canal AWGN | $\mathbf{h}_{\text{AWGN}} = 1$ |
| Canal Seletivo em Frequência Invariante | $\mathbf{h}_{\text{FSC}} = [1\ 0.4\ 0.2\ 0.08]$ |
| Canal Variante no Tempo | $\mathbf{h}_{\text{TVC}} = h, h \sim \mathcal{CN}(0,1)$ |

O resultado obtido é comparado com a probabilidade de erro de bit teórica. As expressões analíticas do desempenho de taxa de erro de bit, considerando a modulação BPSK, sob os canais AWGN, seletivo em frequência e variante no tempo são dadas, respectivamente, por

$$P_{b\text{AWGN}}(e) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right), \tag{5.1}$$

$$P_{b\text{FSC}}(e) = \frac{1}{2K}\sum_{k=0}^{K-1}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{|\mathcal{H}[k]|^2 E_b}{N_0}}\right), \tag{5.2}$$

$$P_{b\mathrm{TVC}}(e) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\frac{E_b}{N_0}}{\frac{E_b}{N_0}+1}}\right), \tag{5.3}$$

onde $\mathcal{H}$ é a resposta em frequência do canal, $E_b$ é a energia média por bit e $N_0$ é a densidade de potência de ruído. Para uma constelação da modulação de amplitude em quadratura (*quadrature amplitude modulation*m QAM) $J$-ária genérica, as curvas teóricas da taxa de erro de símbolo (*symbol error rate*, SER) são aproximadamente dadas por

$$P_{\mathrm{AWGN}}(e) \approx 2\left(\frac{\sqrt{J}-1}{\sqrt{J}}\right)\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\gamma}\right). \tag{5.4}$$

$$P_{\mathrm{FSC}}(e) \approx \frac{2}{K}\left(\frac{\sqrt{J}-1}{\sqrt{J}}\right)\sum_{k=0}^{K-1}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\gamma|\mathcal{H}[k]|^2}\right), \tag{5.5}$$

$$P_{\mathrm{TVC}}(e) \approx 2\left(\frac{\sqrt{J}-1}{\sqrt{J}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\right), \tag{5.6}$$

onde

$$\gamma = \frac{3}{2(J-1)}\frac{J}{\log_2(J)}\frac{E_b}{N_0}. \tag{5.7}$$

## 5.1 Avaliação de desempenho do sinal FTN-GFDM considerando a detecção ML

Esta seção apresenta a taxa de erro de bit para o sistema FTN-GFDM com modulação BPSK, empregando a detecção ML. Os canais considerados nas simulações foram os apresentados na Tabela 5.1. Também foram testados dois filtros protótipos: *i*) Dirichlet; e *ii*) retangular. A Tabela 5.2 mostra os pârametros do FTN-GFDM empregados nesta seção.

Para os parâmetros escolhidos, o valor da razão $\bar{S}/v_f = 5/0,8 = 6,25$ não é um valor inteiro e, devido ao arredondamento, há uma perda na densidade de dados. Portanto, a normalização do sinal de transmissão é feita em função de $\bar{v}_f$, que neste caso é igual à $5/6 = 0,833$. Consequentemente, a densidade de símbolos de dados por amostra do bloco GFDM é de $1,2$.

Nas simulações considerou-se também o uso do código polar com os seguintes parâmetros: taxa de codificação $\frac{1}{2}$; o tamanho do bloco é 2048, onde 14 bits são puncionados e; decodificação realizada empregando cancelamento sucessivo

Tabela 5.2 – *Parâmetros de sistema considerados nas Fig. 5.1 e 5.2*

| Parâmetro | FTN-GFDM |
|---|---|
| Filtro protótipo | Dirichlet e retangular |
| Número de períodos ($\bar{P}$) | 3 |
| Número de amostras por período ($\bar{S}$) | 5 |
| Fator de compressão de subportadora ($v_f$) | 0,8 |
| Fator de compressão de subsímbolo ($v_t$) | 1 |
| Número de subsímbolos ($M$) | 3 |
| Número de subportadoras ($K$) | 6 |
| Taxa de codificação | $\frac{1}{2}$ |
| Tamanho do bloco | 2048 |
| Bits puncionados | 14 |

de interferência (*successive interference cancellation*, SIC). Para quantificar o ganho de desempenho proporcionado pela codificação polar, uma BER alvo é estabelecida como referência para cada canal, sendo: $10^{-6}$ para o canal AWGN; $10^{-5}$ para o FSC e; $3 \cdot 10^{-3}$ para o TVC.

A Figura 5.1 considera o FTN-GFDM com filtro protótipo Dirichlet. O desempenho do sistema é avaliado em termos de BER para o sinal codificado e não codificado. Como esperado, o desempenho do sistema sem codificação coincide com as curvas teóricas. Já para o sistema codificado, há uma melhoria no desempenho. Considerando os valores de BER estabelecidos como referência, os ganhos de desempenho são de aproximadamente $1,5$dB para o canal AWGN, $2,5$dB para o FSC e $2,3$dB para o TVC.

Na Figura 5.2, o mesmo esquema é proposto, mas modelado por um filtro protótipo retangular. O desempenho do FTN-GFDM com o código polar também é avaliado. Como pode ser observado, a codificação polar fornece uma melhoria considerável do desempenho de BER alcançado pelo esquema proposto. O ganho foi de, aproximadamente, $3,5$dB para o canal AWGN, 4dB para o FSC e $3,5$dB para o TVC. Portanto, o filtro retangular possui melhor desempenho em relação ao Dirichlet, para os parâmetros em consideração, pois causa menos IIP ao sistema. Estes resultados mostram que o sinal FTN-GFDM é capaz de aumentar a eficiência do espectro sem penalidades de desempenho em termos de BER. Assim, o esquema proposto pode ser usado em cenários onde alta robustez e eficiência são exigidos, e a complexidade do receptor pode ser adequadamente acomodada, desde que um

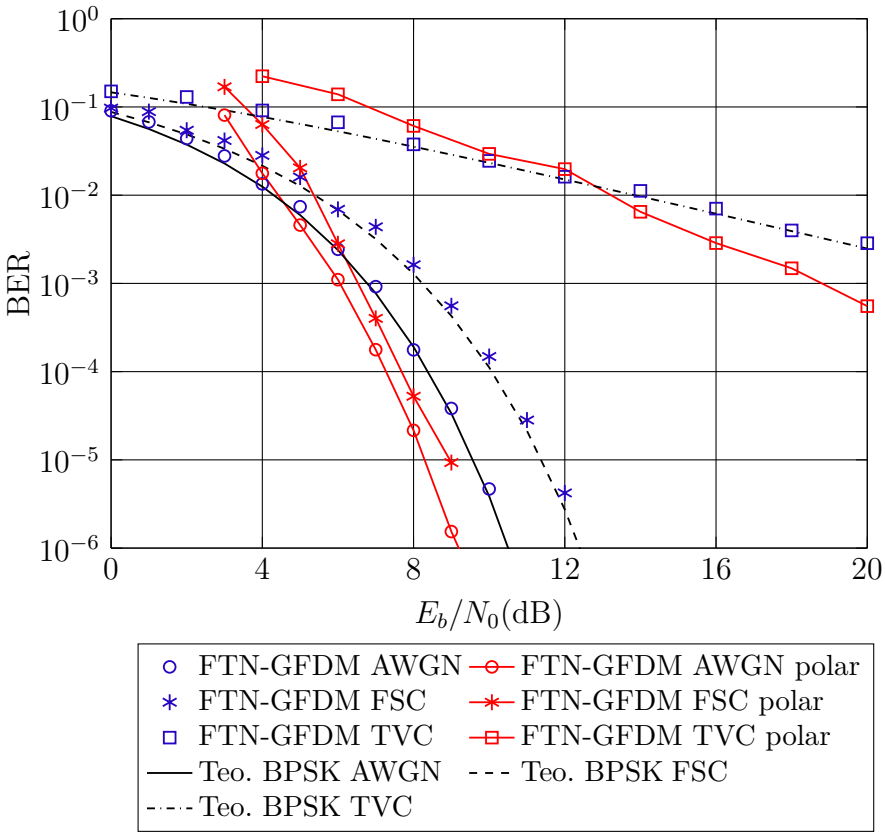



Figura 5.1 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com pulso protótipo Dirichlet, com e sem codificação polar e com detecção ML.*

esquema de detecção com complexidade razoável esteja disponível.

## 5.2 Avaliação de desempenho do sinal FTN-GFDM considerando a detecção SD

Esta seção avalia o desempenho do algoritmo SD proposto para os modelos de canais apresentados na Tabela 5.1. Novamente, a modulação BPSK é considerada e a Tabela 5.3 mostra os parâmetros empregados para simular o sistema FTN-GFDM. Dois cenários diferentes são testados: *i*) compressão no domínio do tempo e; *ii*) compressão no domínio da frequência. O desempenho em termos de BER destes esquemas com e sem codificação de canal é analisado. A BER alvo estabelecida como referência é de $10^{-6}$ para o canal AWGN, $10^{-5}$ para o FSC e $3 \cdot 10^{-3}$ para o TVC. A Tabela 5.4 apresenta as configurações do codificador polar em questão.

A Figura 5.3 mostra a taxa de erro de bit para o FTN-GFDM com compressão no tempo. ISI é inserida ao sinal devido a $v_t = 0,8$. Consequentemente,

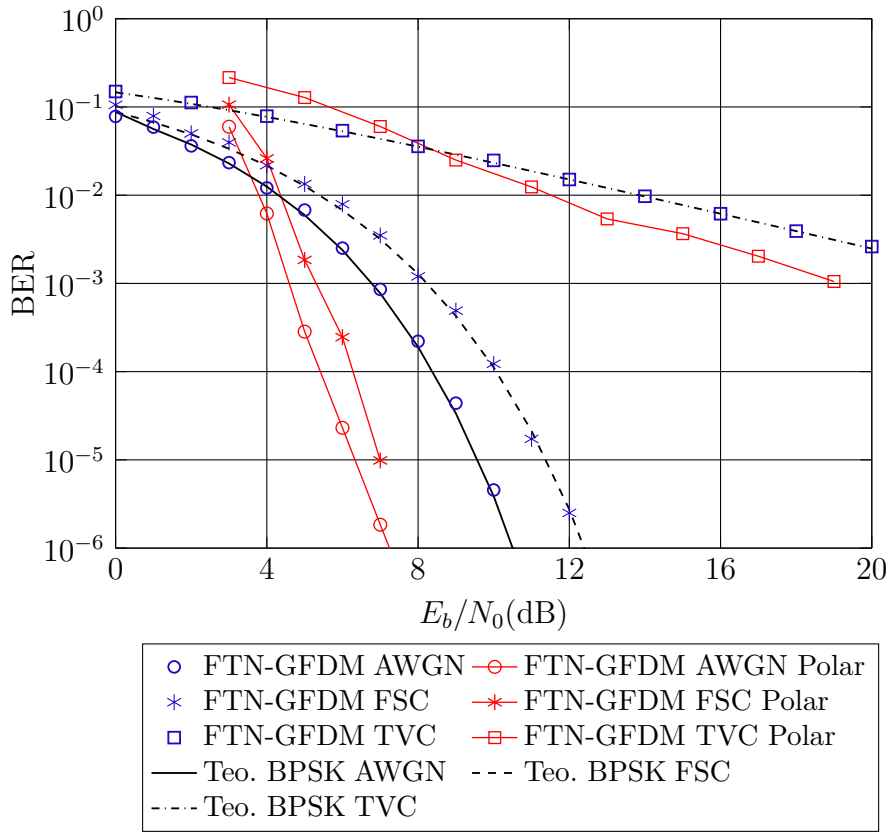



Figura 5.2 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com pulso protótipo retangular, com e sem codificação polar e com detecção ML.*

25% a mais de dados são transmitidos a cada bloco FTN-GFDM. Os resultados demonstram que o SD consegue alcançar o desempenho do ML para valores de $\frac{E_b}{N_0}$ elevados, com uma complexidade menor. O código polar permite um ganho de desempenho de aproximadamente 4dB para os canais AWGN e FSC e de 2dB para o TVC.

Tabela 5.3 – *Parâmetros do FTN-GFDM para as Fig. 5.3 e 5.4*

| Parâmetros FTN-GFDM | Tempo | Frequência |
|---|---|---|
| Filtro protótipo | Dirichlet | retangular |
| Número de períodos ($\bar{P}$) | 4 | 4 |
| Número de amostras por período ($\bar{S}$) | 5 | 5 |
| Fator de compressão de subsímbolo ($v_t$) | 0,8 | 1 |
| Fator de compressão de subportadora ($v_f$) | 1 | 0,8 |
| Número de subsímbolos ($M$) | 5 | 4 |
| Número de subportadoras ($K$) | 5 | 6 |

Tabela 5.4 – *Parâmetros do codificador polar considerados nas Fig. 5.3 e 5.4*

| Parâmetros | Tempo | Frequência |
|---|---|---|
| Taxa de codificação | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Tamanho do bloco | 1024 | 2048 |
| Bits puncionados | 24 | 8 |

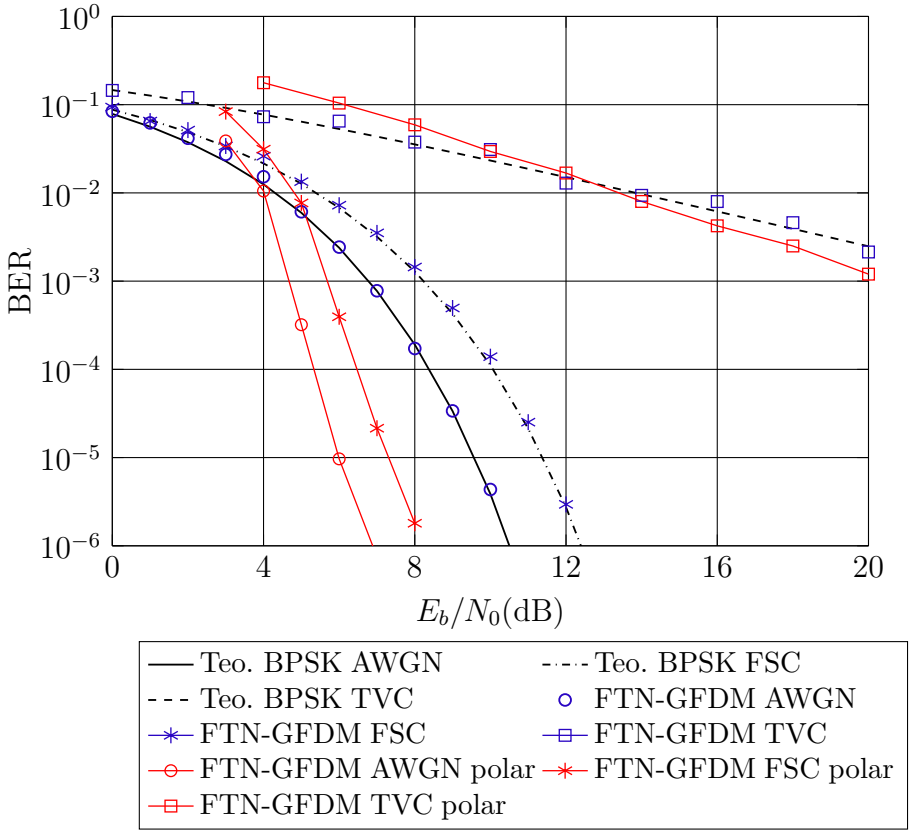



Figura 5.3 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com compressão no tempo e detecção SD.*

A Figura 5.4 apresenta o desempenho do FTN-GFDM com compressão no domínio da frequência. O pulso protótipo retangular é usado e ICI é inserida ao sistema. Devido o valor da razão $\bar{S}/v_f = 5/0,8 = 6,25$ não ser um inteiro há uma perda na densidade de dados, resultante do arredondamento na expressão de $K$. Portanto, a normalização do sinal de transmissão deve ser feita em função de $\bar{v}_f = 5/6 = 0,833$. Para os parâmetros considerados, 20% mais símbolos são transmitidos por bloco FTN-GFDM em relação ao bloco GFDM convencional. Os resultados mostram que SD consegue alcançar o mesmo desempenho que o ML para os três canais propostos. Quando a codificação polar é aplicada no sinal FTN-GFDM, há um ganho de desempenho no sistema de aproximadamente 3,5dB para o AWGN, 4,9dB para o FSC e 3dB para o TVC. Devido ao fato

de $\bar{v}_f = 0,833$, o ganho proporcionado pela codificação é aproximadamente 1dB maior no FSC e TVC se comparado ao da Figura 5.3.

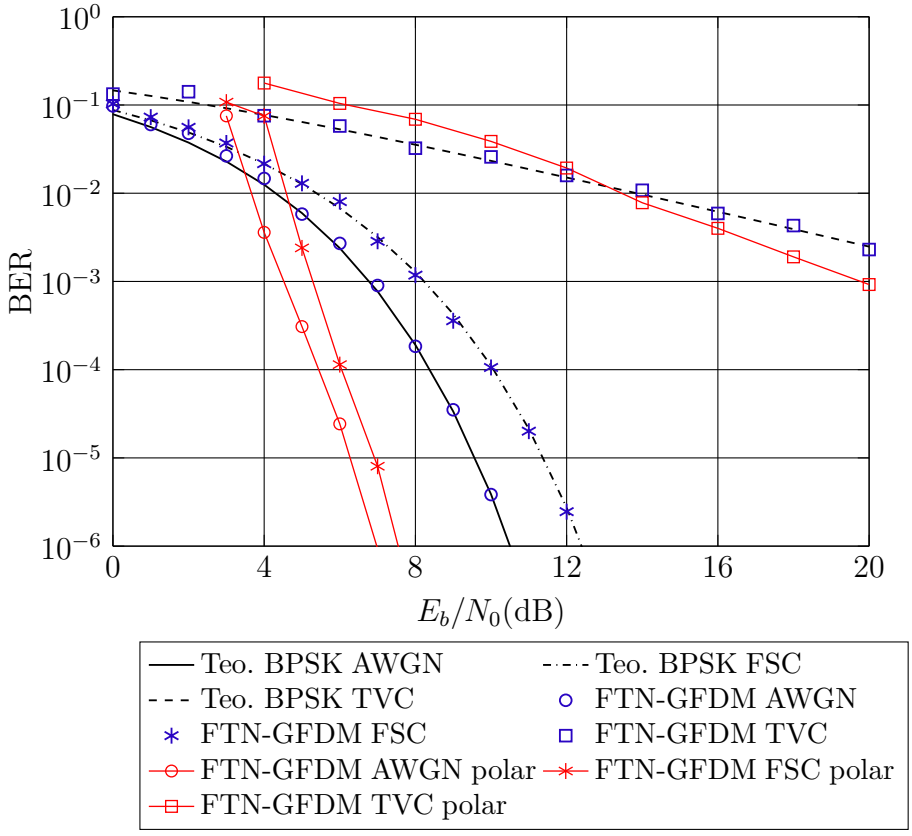



Figura 5.4 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com compressão na frequência e detecção SD.*

Tabela 5.5 – *Parâmetros de sistema considerados na Fig. 5.5*

| Parâmetro | FTN-GFDM |
|---|---|
| Filtro Protótipo | RRC ($\beta = 0$ *e* $\beta = 0.5$) |
| Número de períodos ($\bar{P}$) | 4 |
| Número de amostras por período ($\bar{S}$) | 5 |
| Fator de compressão de subportadora ($v_f$) | 0,75 |
| Fator de compressão de subsímbolo ($v_t$) | 0,8 |
| Número de subsímbolos ($M$) | 5 |
| Número de subportadoras ($K$) | 6 |

Já a Figura 5.5 mostra os resultados das simulações para o FTN-GFDM com compressão de tempo-frequência. Os parâmetros utilizados estão na Tabela 5.5. A compressão no tempo e na frequência levam a ganhos independentes. Portanto, é possível combinar $v_t$ e $v_f$ a fim de alcançar maiores eficiências espectrais. Porém,

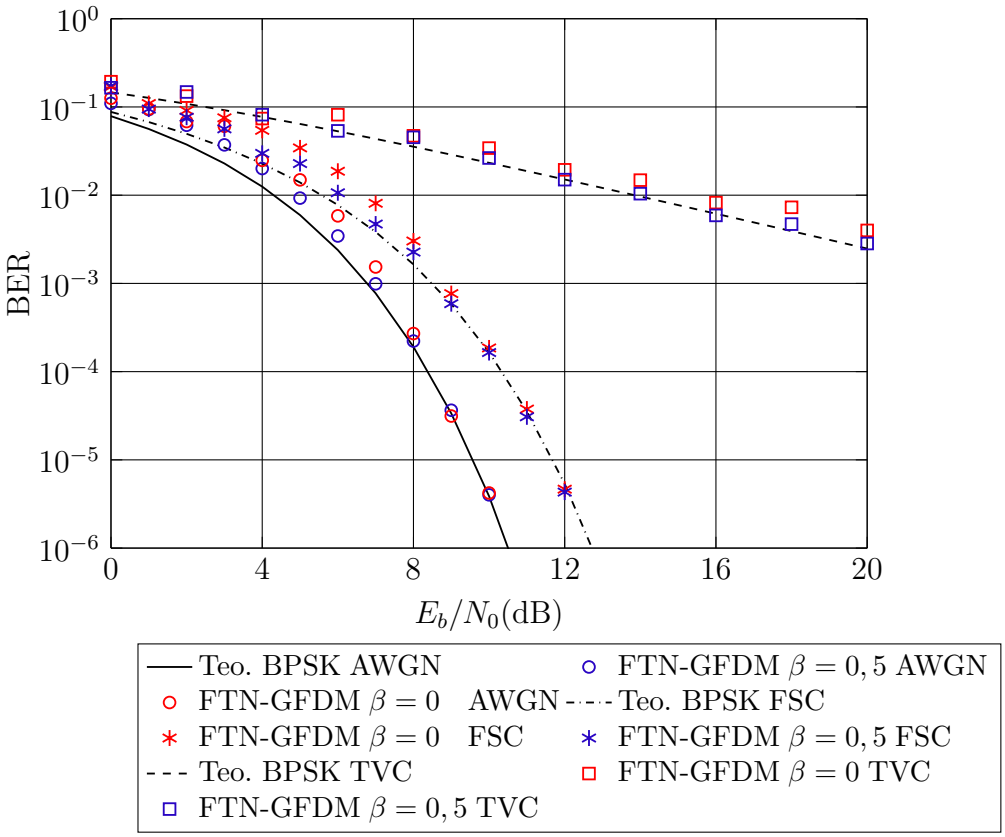



Figura 5.5 – *BER para o FTN-GFDM BPSK com compressão tempo e frequência e detecção SD.*

os valores de $v_t$ e $v_f$ devem ser escolhidos adequadamente, assim como o filtro protótipo, devido ao mal condicionamento da matriz e a complexidade de detecção. Neste caso, o filtro protótipo RRC com fatores de *roll-off* iguais a $\beta = 0$ e $\beta = 0,5$ foram usados. A Figura 5.5 mostra que é possível aumentar a taxa de transmissão em 50% sem causar penalidades ao desempenho em termos de BER, usando $\bar{v}_f = 5/6 = 0,8333$ e $\bar{v}_t = 4/5 = 0,8$. Mais uma vez, a detecção de SD é capaz de manter o desempenho ML, a um custo de complexidade variável.

Por fim, o desempenho em termos de taxa de erro de símbolo (*symbol error rate*, SER) do FTN-GFDM com a modulação 4-QAM foi avaliado. Os parâmetros usados são os apresentados na Tabela 5.6.

A Figura 5.6 mostra o desempenho em termos de SER para o FTN-GFDM empregando símbolos de entrada 4-QAM. Como foi provado que a codificação polar é fornece ganho de desempenho ao FTN-GFDM com modulação BPSK, o desempenho em termos de SER é avaliado apenas para o FTN-GFDM com uma ordem de modulação maior. Para os valores de $v_t = 1$ e $v_f = 0,8$, houve um aumento de 20% na densidade de símbolos de dados por amostra FTN-GFDM e o

Tabela 5.6 – *Parâmetros de sistema considerados na Fig. 5.6*

| Parâmetro | FTN-GFDM |
|---|---|
| Filtro Protótipo | retangular |
| Número de períodos ($\bar{P}$) | 3 |
| Número de amostras por período ($\bar{S}$) | 5 |
| Fator de compressão de subportadora ($v_f$) | 0,8 |
| Fator de compressão de subsímbolo ($v_t$) | 1 |
| Número de subsímbolos ($M$) | 3 |
| Número de subportadoras ($K$) | 6 |

SD manteve o desempenho de SER igual ao ML para os canais FSC e TVC. Para o canal AWGN, houve uma pequena perda no desempenho na SER. Isto ocorre devido ao ganho de diversidade do GFDM que acontece nos canais FSC e TVC.

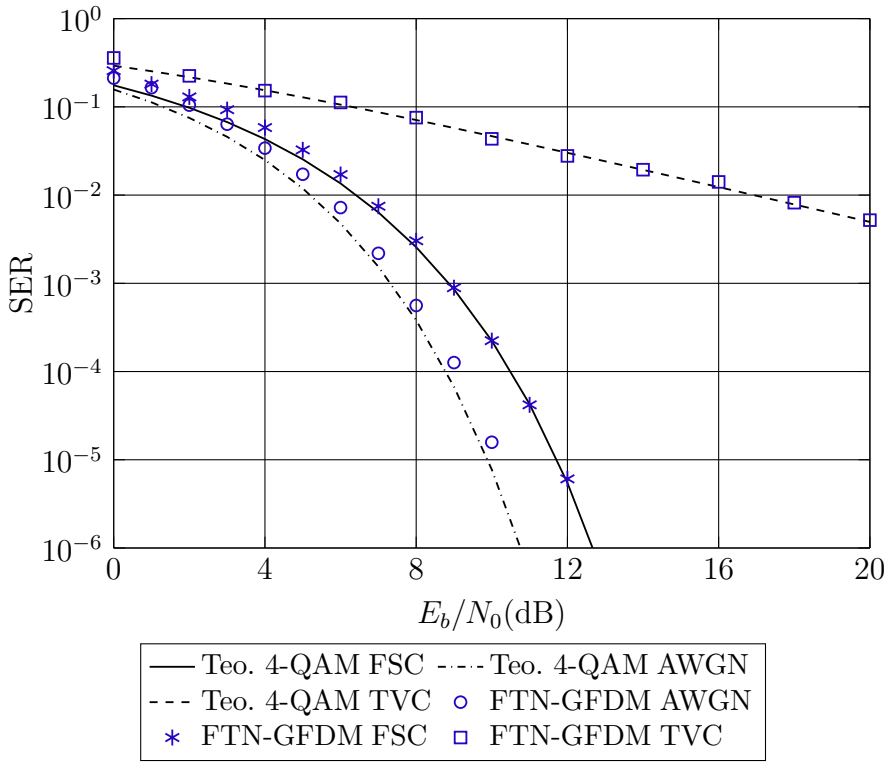



Figura 5.6 – *SER para o FTN-GFDM 4-QAM com compressão na frequência e detecção SD.*

### 5.2.1 Análise de Complexidade

A complexidade do SD é variável e depende do condicionamento da matriz $\mathbf{G}$, do nível de ruído, da dimensão da matriz de transmissão e da ordem de

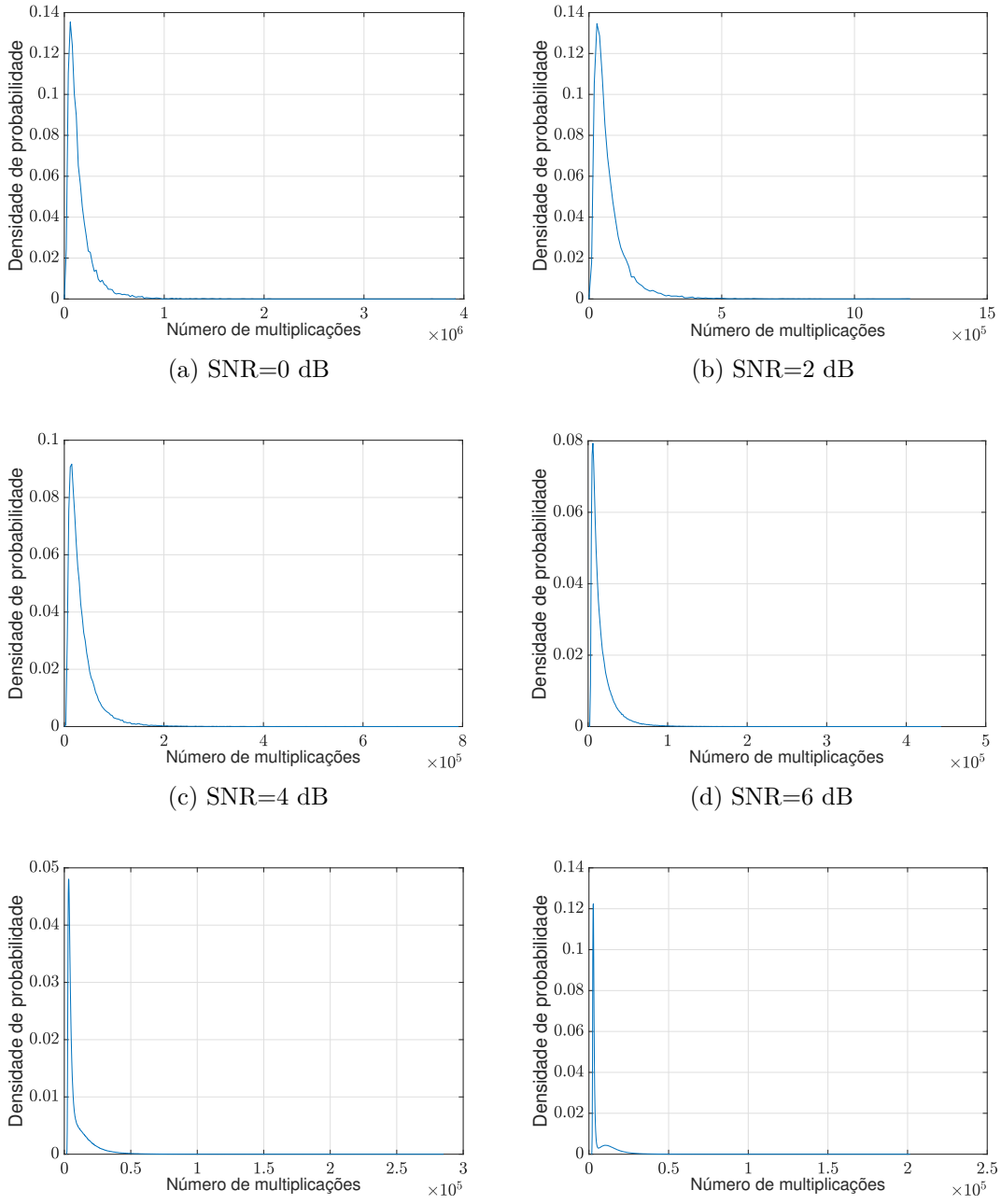
modulação. Diferentemente do SD, a complexidade do ML é constante e cresce exponencialmente com o aumento da dimensão da matriz de transmissão do sistema e da ordem de modulação. Nesta seção, a complexidade do SD proposto é avaliada em função da SNR e comparada com a complexidade do ML.

A Figura 5.7 apresenta a função densidade de probabilidade do número de operações do SD para diferentes valores de SNR. Para isto, foram considerados os parâmetros apresentados na Tabela 5.6, o canal AWGN e a modulação BPSK. Como esperado, a complexidade do SD diminui com o aumento da SNR do sinal. Também é possível concluir que o número de operações varia menos em SNR altas. Para SNR=0 dB, a complexidade do SD pode alcançar valores próximos ou iguais a complexidade do ML, porém o valor médio do número de operações do SD é menor do que aquele observado para o ML. De fato, o valor médio do número de operações do SD é aproximadamente $3,1\%$ do número de operações do ML, considerando SNR=0 dB, conforme pode ser visto na Tabela 5.7. Já para SNR=10 dB, a ocorrência de elevados números de multiplicações é baixa e, portanto, a probabilidade da complexidade do SD ser igual à complexidade do ML é práticamente nula. Nesta SNR, o número médio de multiplicações do SD é apenas $0,13\%$ do número de multiplicações do ML.

A Tabela 5.7 também compara os valores médios de números de operações do SD com o número de operações do ML para valores intermediários de SNR, e apresenta o percentual da relação entre o valor médio do número de operações do SD e o número de operações do ML para cada SNR. Vale observar que a complexidade média do SD para SNR=10 dB é quase 23 vezes menor do aquela observada para SNR=0 dB. Para o cenário considerado, o valor médio de operações praticamente cai pela metade com o aumento da SNR. Portanto, é possível concluir que o algoritmo SD é capaz de diminuir a complexidade de detecção do sinal FTN-GFDM em relação ao ML e, ainda sim, garantir um bom desempenho em termos de BER.

Tabela 5.7 – *Comparação entre a complexidade de detecção SD e ML*

| SNR (dB) | Complexidade média SD | Complexidade ML | % |
|---|---|---|---|
| 0 | 146352 | 4718592 | 3,1016% |
| 2 | 71873 | 4718592 | 1,5200% |
| 4 | 33087 | 4718592 | 0,7012% |
| 6 | 16085 | 4718592 | 0,3409% |
| 8 | 9169 | 4718592 | 0,1943% |
| 10 | 6439 | 4718592 | 0,1365% |




(a) SNR=0 dB

(b) SNR=2 dB

(c) SNR=4 dB

(d) SNR=6 dB

(e) SNR=8 dB

(f) SNR=10 dB

Figura 5.7 – *Complexidade em função dos valores de SNR.*

## 5.3 Conclusões

Os resultados mostram que o FTN-GFDM é capaz de melhorar a eficiência do GFDM sem causar penalidades de desempenho de BER. Assim, o GFDM pode ser considerado como um esquema de forma de onda flexível que é capaz de atender a diferentes critérios de projeto, dependendo da aplicação prevista. Além disso, a avaliação de desempenho em termos de BER do SD mostra que, sob

as restrições da simulação, o algoritmo do receptor é capaz de fornecer mesmo desempenho que o ML em canais seletivos em frequência e variantes no tempo, com uma complexidade menor que pode ser suportada nas atuais implementações de sistemas de comunicações móveis. A análise de complexidade realizada comprova que o SD possui complexidade menor do que o ML, e que o número médio de multiplicações diminui com o aumento da SNR. Para o cenário considerado na análise, o número médio de multiplicações do SD é quase 733 vezes menor do que o número de multiplicações do ML para SNR=10 dB.

# Capítulo 6

# Conclusão e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação, foi realizado um estudo abrangendo os princípios básicos das formas de onda GFDM, FTN e SEFDM, bem como os projetos dos transceptores foram apresentados no Capítulo 2. Posteriormente, o esquema FTN-GFDM, o qual o desempenho pode se igualar ao desempenho do GFDM, foi apresentado usando a notação matricial do GFDM. Consequentemente, o conjunto de modulações englobadas pelo GFDM foi estendido e os cenários em que alta eficiência espectral e robutez são exigidas podem se beneficiar das configurações no GFDM propostas neste trabalho. Além disso, um algoritmo de recepção baseado do Sphere Decoder foi proposto no Capítulo 4, a fim de alcançar um desempenho em termos de taxa de erro de bit similar ao observado pelo receptor ótimo, mas com complexidade menor. O desempenho das técnicas propostas foi avaliado através de simulações numéricas com o MATLAB®. Como apresentado no Capítulo 5, para valores altos de SNR, o SD consegue alcançar o mesmo desempenho que o ML, em praticamente todos os casos de interesse prático, provando que o sistema FTN pode ser aplicado ao GFDM e aumentar a eficiência espectral, respeitando o limite de Mazo. Também foi provado que técnicas de codificação atuais são aplicáveis ao sistema FTN-GFDM e fornecem ganho de desempenho com uma complexidade razoável. O código polar é tido como promissor em vários cenários do 5G e é proposto pelo 5G-RANGE como técnica de codificação para áreas remotas. Como uma das motivações desta dissertação é o uso do FTN-GFDM em cenários de áreas remotas, as análises de desempenho em termos de BER foram feitas integrando o código polar ao FTN-GFDM. Por fim, a complexidade do SD foi analisada e comparada com a complexidade do ML, onde ficou comprovado que o SD possui de fato, uma complexidade média menor do que o ML e que seu valor diminui com o aumento da SNR do sinal.

Perspectivas de trabalho futuras apontam para algoritmos de detecção

iterativos capazes de lidar com a interferência gerada pelo FTN. Esquemas de detecção baseados no algoritmo de passagem de mensagem (*message passing algorithms*, MPA) foram notavelmente empregados para a decodificação de verificação de paridade de baixa densidade (*low-density parity-check*, LDPC), e podem ser empregados na detecção do sinal FTN-GFDM em pequisas futuras. O decodificador esférico de complexidade fixa (*fixed-complexity sphere decoder*, FSD) também pode ser implementado na recepção. O FSD realiza uma pesquisa apenas sobre um número fixo de sinais transmitidos possíveis. Isso garante que a complexidade do detector seja fixada ao longo do tempo, uma grande vantagem para a implementação em *hardware*.

# Referências

[1] SETHI, P.; SARANGI, S. R. Internet of things: architectures, protocols, and applications. *Journal of Electrical and Computer Engineering*, Hindawi, 2017.

[2] OSSEIRAN, A. et al. Scenarios for 5G mobile and wireless communications: the vision of the METIS project. *IEEE Communications Magazine*, v. 52, n. 5, p. 26–35, May 2014. ISSN 0163-6804.

[3] WUNDER, G. et al. 5GNOW: non-orthogonal, asynchronous waveforms for future mobile applications. *IEEE Communications Magazine*, v. 52, n. 2, p. 97–105, February 2014. ISSN 0163-6804.

[4] HEFNAWY, M. E.; TAOKA, H. Overview of faster-than-Nyquist for future mobile communication systems. In: *2013 IEEE 77th Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–5. ISSN 1550-2252.

[5] FERREIRA, A. et al. 5G-RANGE project field trial. In: *2019 European Conference on Networks and Communications (EuCNC)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 490–494. ISSN 2475-6490.

[6] BANELLI, P. et al. Modulation formats and waveforms for 5G networks: Who will be the heir of OFDM?: An overview of alternative modulation schemes for improved spectral efficiency. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 31, n. 6, p. 80–93, Nov 2014. ISSN 1053-5888.

[7] GERZAGUET, R. et al. The 5G candidate waveform race: a comparison of complexity and performance. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, v. 2017, n. 1, p. 13, Jan 2017. ISSN 1687-1499. Disponível em: <https://doi.org/10.1186/s13638-016-0792-0>.

[8] MICHAILOW, N. et al. Generalized frequency division multiplexing for 5th generation cellular networks. *IEEE Transactions on Communications*, v. 62, n. 9, p. 3045–3061, Sept 2014. ISSN 0090-6778.

[9] HWANG, T. et al. OFDM and its wireless applications: A survey. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 58, n. 4, p. 1673–1694, May 2009. ISSN 0018-9545.

[10] ZHANG, D. et al. A study on the link level performance of advanced multicarrier waveforms under mimo wireless communication channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, v. 16, n. 4, p. 2350–2365, April 2017. ISSN 1536-1276.

[11] GASPAR, I. et al. GFDM–A framework for virtual PHY services in 5G networks. *arXiv preprint arXiv:1507.04608*, 2015.

[12] MAZO, J. E. Faster-than-Nyquist signaling. *The Bell System Technical Journal*, v. 54, n. 8, p. 1451–1462, Oct 1975. ISSN 0005-8580.

[13] ANDERSON, J. B.; RUSEK, F.; ÖWALL, V. Faster-than-Nyquist signaling. *Proceedings of the IEEE*, v. 101, n. 8, p. 1817–1830, Aug 2013. ISSN 0018-9219.

[14] GUIMARAES, D. *Digital Transmission: A Simulation-Aided Introduction with VisSim/Comm*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010. (Signals and Communication Technology). ISBN 9783642013591.

[15] PROAKIS, J.; SALEHI, M. *Digital Communications*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008. (McGraw-Hill International Edition). ISBN 9780071263788.

[16] XU, T.; DARWAZEH, I. Spectrally efficient FDM: Spectrum saving technique for 5G? In: *1st International Conference on 5G for Ubiquitous Connectivity*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 273–278.

[17] RUSEK, F.; ANDERSON, J. B. The two dimensional Mazo limit. In: *Proceedings. International Symposium on Information Theory, 2005. ISIT 2005.* [S.l.: s.n.], 2005. p. 970–974. ISSN 2157-8095.

[18] DARWAZEH, I.; RODRIGUES, M. A spectrally efficient frequency division multiplexing based communications system. In: *Proceedings of the 8th International OFDM-Workshop, Hamburg, Germany*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 70–74.

[19] FINCKE, U.; POHST, M. Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis. *Mathematics of Computation*, American Mathematical Society, v. 44, n. 170, p. 463–471, 1985. ISSN 00255718, 10886842. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2007966>.

[20] VITERBO, E.; BOUTROS, J. A universal lattice code decoder for fading channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 45, n. 5, p. 1639–1642, July 1999. ISSN 0018-9448.

[21] CHAN, A. M.; LEE, I. A new reduced-complexity sphere decoder for multiple antenna systems. In: *2002 IEEE International Conference on Communications. Conference Proceedings. ICC 2002 (Cat. No.02CH37333)*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 1, p. 460–464 vol.1.

[22] KANARAS, I. et al. Spectrally efficient FDM signals: Bandwidth gain at the expense of receiver complexity. In: *2009 IEEE International Conference on Communications*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1–6. ISSN 1550-3607.

[23] ARIKAN, E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 55, n. 7, p. 3051–3073, July 2009. ISSN 0018-9448.

[24] SASOGLU, E.; TELATAR, E.; ARIKAN, E. Polarization for arbitrary discrete memoryless channels. In: *2009 IEEE Information Theory Workshop*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 144–148.

[25] HASHEMI, S. A. et al. Decoder partitioning: Towards practical list decoding of polar codes. *IEEE Transactions on Communications*, PP, p. 1–1, 05 2018.

[26] FETTWEIS, G.; KRONDORF, M.; BITTNER, S. GFDM - generalized frequency division multiplexing. In: *VTC Spring 2009 - IEEE 69th Vehicular Technology Conference*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1–4. ISSN 1550-2252.

[27] MENDES, L. et al. GFDM: providing flexibility for the 5G physical layer. *Opportunities in 5G Networks: A Research and Development Perspective*, CRC Press, p. 325, 2016.

[28] LUHACH, A. et al. *Advanced Informatics for Computing Research: Second International Conference, ICAICR 2018, Shimla, India, July 14–15, 2018, Revised Selected Papers*. [S.l.]: Springer Singapore, 2018. (Communications in Computer and Information Science, pt. 2). ISBN 9789811331435.

[29] MICHAILOW, N. et al. Generalized frequency division multiplexing: Analysis of an alternative multi-carrier technique for next generation cellular systems. In: *2012 International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS)*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 171–175. ISSN 2154-0225.

[30] FARHANG, A.; MARCHETTI, N.; DOYLE, L. E. Low complexity GFDM receiver design: A new approach. In: *2015 IEEE International Conference on Communications (ICC)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 4775–4780. ISSN 1550-3607.

[31] BEDEER, E.; AHMED, M. H.; YANIKOMEROGLU, H. A very low complexity successive symbol-by-symbol sequence estimator for faster-than-Nyquist signaling. *IEEE Access*, v. 5, p. 7414–7422, 2017. ISSN 2169-3536.

[32] FAN, J. et al. Faster-than-Nyquist signaling: An overview. *IEEE Access*, v. 5, p. 1925–1940, 2017. ISSN 2169-3536.

[33] LIVERIS, A. D.; GEORGHIADES, C. N. Exploiting faster-than-Nyquist signaling. *IEEE Transactions on Communications*, v. 51, n. 9, p. 1502–1511, Sep. 2003. ISSN 0090-6778.

[34] XU, T.; DARWAZEH, I. M-QAM signal detection for a non-orthogonal system using an improved fixed sphere decoder. In: *2014 9th International Symposium on Communication Systems, Networks Digital Sign (CSNDSP)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 623–627.

[35] FORNEY, G. Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 18, n. 3, p. 363–378, May 1972. ISSN 0018-9448.

[36] KANARAS, I. et al. A new quasi-optimal detection algorithm for a non orthogonal spectrally efficient FDM. In: *2009 9th International Symposium on Communications and Information Technology*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 460–465.

[37] KANARAS, I. et al. A combined MMSE-ML detection for a spectrally efficient non orthogonal FDM signal. In: *2008 5th International Conference on Broadband Communications, Networks and Systems*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 421–425.

[38] AHMED, S. *Spectrally efficient FDM communication signals and transceivers: design, mathematical modelling and system optimization*. Tese (Doutorado) — Dept. of Electron. and Elect. Eng., Univ. College London, London, U.K., 2011.

[39] HASSIBI, B.; VIKALO, H. On the sphere-decoding algorithm I. Expected complexity. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 53, n. 8, p. 2806–2818, Aug 2005. ISSN 1053-587X.

[40] BEDEER, E.; YANIKOMEROGLU, H.; AHMED, M. H. Reduced complexity optimal detection of binary faster-than-Nyquist signaling. In: *2017 IEEE International Conference on Communications (ICC)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–6. ISSN 1938-1883.

[41] ZHAO, F.; QIAO, S. *Radius selection algorithms for sphere decoding*. [S.l.: s.n.], 2009. 169-174 p.

[42] RINGH, E. *Low complexity algorithm for faster-than-Nyquist signaling: using coding to avoid an NP-hard problem*. Dissertação (Mestrado) — Master of Science thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2013.

[43] HIGHAM, N. J. Cholesky factorization. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, v. 1, p. 251 – 254, 09 2009.